2.11.Олимпиада им. Курчатова (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 10 класс

1. Петр решил перевести свой рублевый счет в банке в доллары по курсу k долларов за один рубль. За эту операцию банк уменьшил сумму на счету на 2%. Долларовый вклад пролежал на счету три года под 3% годовых, после чего Петр вернул его в рублевый эквивалент без дополнительных комиссий.

К своему удивлению, Петр обнаружил на счету первоначальную сумму.

На сколько процентов изменился курс рубля по отношению к доллару (число k) за три года? Ответ округлить до $0,01$.

2. Найти все значения x, при которых найдется число a, для которого

$$\cos a - \cos 2a = \frac{16x^2 - 75x + 5}{16(x^2 - 4)}.$$

3. Найти числа a, b и c, при которых многочлен $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1$ можно представить в виде квадрата

трехчлена $ax^2 + bx + c$.

4. Найти все целые числа $x > 5$ и $y > 7$, удовлетворяющие уравнению

$$(x - y)^2 + 5(x - y) - 2x = 4.$$

5. Точки M и N лежат на поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4 на параллельных гранях AA_1D_1D и BB_1C_1C соответственно. Точка M удалена от ребер AA_1 и AD на расстояния 3 и 1, а точка N - на расстояния 1 и 2 от ребер B_1C_1 и C_1C. Точки M и N соединены ломаной линией, лежащей на поверхности куба. Найти наименьшую возможную длину ломаной.

Ответы и решения

Задача 1 Ответ: увеличился на 7,09%

Решение

Первоначальная сумма вклада A руб. Измененный курс $k_1 = k \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, где p – искомый процент. $k \cdot A \cdot 0,98$ – первоначальное количество долларов на вкладе, $k \cdot A \cdot 0,98 \cdot (1,03)^3$ – количество долларов на вкладе через три года,

$$\frac{k \cdot A \cdot 0,98 \cdot (1,03)^3}{k_1} = \frac{A \cdot 0,98 \cdot (1,03)^3}{(1 + \frac{p}{100})} = A \to 1 + \frac{p}{100} = 0,98 \cdot (1,03)^3 \to p = 7,087246$$

С учетом округления $p = 7,09\%$.

Задача 2 Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{77}{2}\right] \cup [-1;1] \cup \left[\frac{123}{48}; +\infty\right)$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{77}{2}\right] \cup [-1;1] \cup \left[\frac{123}{48}; +\infty\right)$

Решение

Найдем множество значений функции $f(a) = \cos a - \cos 2a = 1 + \cos a - 2\cos^2 a$.

Замена $t = \cos a \in [-1;1]$ приводит к квадратному трехчлену $\tilde{f}(t) = 1 + t - 2t^2$. Необходимо найти множество его значений на отрезке $[-1;1]$. Наибольшее значение – в вершине при $t = \frac{1}{4}$: $\tilde{f}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$. Наименьшее значение достигается при $t = -1$ и равно $\tilde{f}(-1) = -2$. Искомые значения x находятся из решения неравенства: $-2 \le \frac{16x^2 - 75x + 5}{16(x^2 - 4)} \le \frac{9}{8}$.

Преобразованием приходим системе двух неравенств:

(A) $\frac{2x^2 + 75x - 77}{x^2 - 4} \ge 0$ и (B) $\frac{48x^2 - 75x - 123}{x^2 - 4} \ge 0$.

Неравенство (A) $\frac{(x-1)(2x-77)}{(x-2)(x+2)} \ge 0$ имеет решения $x \in \left(-\infty; -\frac{77}{2}\right] \cup (-2;1] \cup (2;+\infty)$.

Неравенство (B) $\frac{(x+1)(48x-123)}{(x-2)(x+2)} \ge 0$ имеет решения $x \in (-\infty;-2) \cup [-1;2) \in \left[\frac{123}{48};+\infty\right)$.

Пересечение этих множеств даст ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{77}{2}\right] \cup [-1;1] \cup \left[\frac{123}{48}; +\infty\right)$.

Задача 3 Ответ: 1) $a = 2,\ b = -3,\ c = 1$ 2) $a = -2,\ b = 3,\ c = -1$

Решение

$P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1 = \left(ax^2 + bx + c\right)^2, \ \forall x$

$P(0) = 1 = c^2 \to c = \pm 1,$

$P'(x) = 16x^3 - 36x^2 + 26x - 6 = 2\left(ax^2 + bx + c\right)(2ax + b),$

$P'(0) = -6 = 2bc \to b = \mp 3$

$P''(x) = 48x^2 - 72x + 26 = 2(2ax + b)^2 + 4a\left(ax^2 + bx + c\right)$

$P''(0) = 26 = 2b^2 + 4ac = 18 + 4ac \to ac = 2 \to a = \pm 2$

Осталось возвести в квадрат трехчлен $2x^2 - 3x + 1$ и сравнить его с заданным многочленом.

Задача 4 Ответ: $x = \frac{t(t+5)}{2} - 2, \quad y = \frac{t(t+3)}{2} - 2$, где $t \in Z, \quad t \in (-\infty;-7) \cup (3;+\infty)$.

Решение

Обозначим через $t = x - y -$ целое число. Тогда $x = \frac{t^2 + 5t - 4}{2} = \frac{t(t+5)}{2} - 2 > 5$ и $y = \frac{t^2 + 3t - 4}{2} = \frac{t(t+3)}{2} - 2 > 7$ целые числа при любых $t \in Z$, поскольку числа t и $t + 5$ (а также t и $t + 3$) различные по четности.

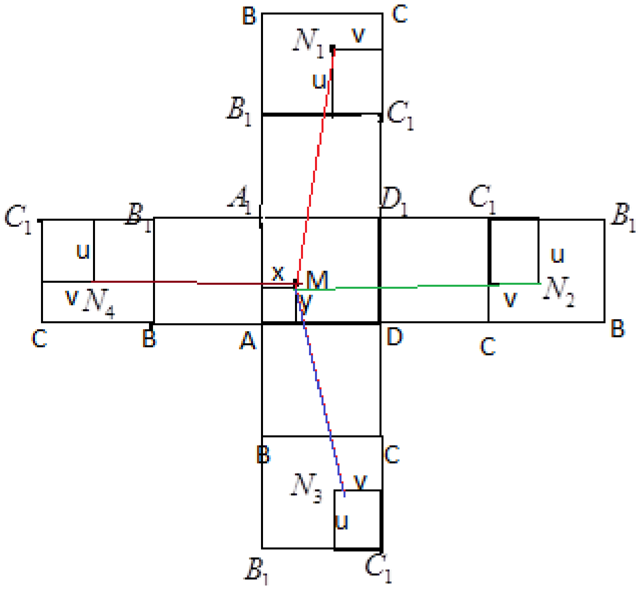
Решение неравенства $x > 5 \to t^2 + 5t - 14 > 0 \to t \in (-\infty;-7) \cup (2;+\infty)$ в совокупности с решением неравенства $y > 7 \to t^2 + 3t - 18 > 0 \to t \in (-\infty;-6) \cup (3;+\infty)$ и

пересечение этих множеств дадут допустимые значения целого параметра t : $t \in (-\infty;-7) \cup (3;+\infty)$

Задача 5 Ответ: $d_{\min} = \sqrt{53}$.

Решение

. Кратчайший путь по поверхности куба – это прямолинейный отрезок на его развертке (см. рис.)



В системе координат A_1AD точка M имеет координаты $(x;y)$, а точка $N=N_1(a-v;2a+u)$ $N=N_2(2a+v;a-u)$, $N=N_3(a-v;-2a+u)$, $N=N_4(-2a+v;a-u)$, где a – ребро куба, x,y – расстояние точки M до ребер AA_1 и AD соответственно, u,v – расстояние точки N до ребер B_1C_1 и CC_1. В варианте 1 $a=4,\ x=3,\ y=1,\ u=1,\ v=2$

Случай 1 (выход через ребро A_1D_1): $d^2_{1,\min}=(a-v-x)^2+(2a+u-y)^2$.

Случай 2 (выход через ребро DD_1): $d^2_{2,\min}=(2a+v-x)^2+(a-u-y)^2$.

Случай 3 (выход через ребро AD): $d^2_{3,\min}=(a-v-x)^2+(-2a+u-y)^2$.

Случай 4 (выход через ребро AA_1): $d^2_{4,\min}=(-2a+v-x)^2+(a-u-y)^2$

Тогда $d^2_{1,\min}=65,\ d^2_{2,\min}=53,\ d^2_{3,\min}=65,\ d^2_{4,\min}=85$. Таким образом, ломаная с наименьшей длиной $\sqrt{53}$ выходит из точки M на ребро DD_1, затем по грани DD_1C_1C на ребро CC_1 и , наконец, по грани BB_1C_1C в точку N .