РЕШЕНИЯ

Задача 1. Поплавок. При добавлении масла в первый сосуд (сосуд, где поплавок) часть воды будет перетекать во второй сосуд (см. Рис. 1). Обозначим h – уровень жидкости в сосуде с поплавком. Равенство давлений в сообщающихся сосудах запишется в следующем виде

$$g\rho_м \frac{vt}{S} = g\rho_в \left(2h_0 - 2h + \frac{2vt}{S}\right), \qquad (2б)$$

$$\Rightarrow h = h_0 + \left(1 - \frac{\rho_м}{2\rho_в}\right)\frac{v}{S}t. \qquad (1б)$$

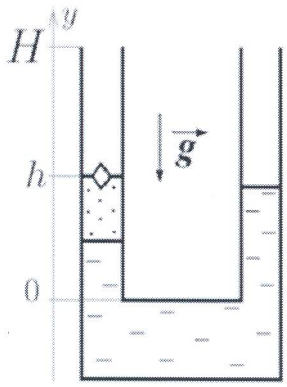

Рис. 1: $t < t_1$

В момент времени t_1 вся вода из первого сосуда с поплавком перетечет во второй сосуд

$$2h_0\rho_в = \rho_м \frac{v}{S}t_1, \qquad (1б)$$

$$t_1 = \frac{2\rho_в h_0 S}{\rho_м v} = 66.7\,\text{с}, \qquad (1б)$$

за это время уровень жидкости h станет равен $h_1 = \frac{vt_1}{S} = 6.7\,\text{см}$, $(h_1 < H)$.

При дальнейшем добавлении масла ($t > t_1$, см. Рис. 2) масло будет перетекать (пробулькивать) во второй сосуд **(2б)**. Уровень поплавка в данном случае можно записать следующим образом

$$h = h_1 + \frac{v(t - t_1)}{2S}. \qquad (1б)$$

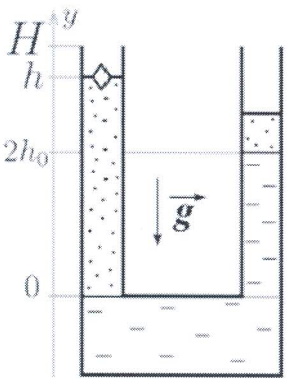

Рис. 2: $t_1 < t < t_2$

В некоторый момент времени t_2 сосуд с поплавком полностью заполнится и добавляемое масло будет выливаться за границу первого сосуда $h_{max} = H$,

$$H = h_1 + \frac{v(t_2 - t_1)}{2S}, \qquad (1б)$$

$$\Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{2S}{v}(H - h_1) = 133.3\,\text{с}. \qquad (1б)$$

При $t > t_2$ уровень поплавка не будет изменяться и приобретет максимальное значение

$$h_{max} = H.$$

Ответ: $h = h_0 + \left(1 - \frac{\rho_м}{2\rho_в}\right)\frac{v}{S}t$, $t < t_1$,
$h = h_1 + \frac{v(t-t_1)}{2S}$, $t_1 < t < t_2$,
$h = H$, $t > t_2$.

Задача 2. На дне. Обозначим натяжение нитей T, T_1, T_2, T_3 так, как показано на Рис. 3. Можно записать следующие уравнения:

$$2T + F_{\text{А}} = T_1 + m_{\text{б}}g, \qquad \textbf{(2б)}$$

$$T_2 + F_{\text{А}} = 2T_1 + m_{\text{б}}g, \qquad \textbf{(2б)}$$

$$2T_3 + F_{\text{А}} = T_2 + m_{\text{б}}g, \qquad \textbf{(2б)}$$

где $F_{\text{А}}$ – сила Архимеда действующая на блок, $m_{\text{б}}$ – масса блока. Из уравнений следует, что $T_3 = 2T$ **(1б)**. Условие равновесия ящика:

$$g\rho_{\text{в}}V = Mg + 5T, \qquad \textbf{(1б)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{5}\left(g\rho_{\text{в}}V - Mg\right)$$

Система имеет смысл, если выполняются следующие неравенства

$$T_1 = 2T + F_{\text{А}} - m_{\text{б}}g \geq 0,$$

$$T_2 = 4T + F_{\text{А}} - m_{\text{б}}g \geq 0.$$

Это означает, что на параметры блока есть следующие ограничения

$$m_{\text{б}} - \rho_{\text{в}}V_{\text{б}} \leq \frac{2}{5}\left(\rho_{\text{в}}V - M\right). \qquad \textbf{(2б)}$$

Ответ: $T = \frac{1}{5}\left(g\rho_{\text{в}}V - Mg\right)$.

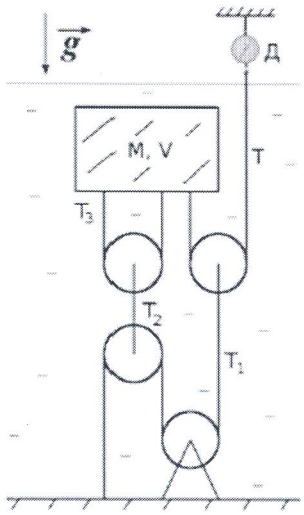

Рис. 3: Обозначение натяжений нитей к задаче 2

Примечание: решение задачи без учета массы и объема блоков оценивается в 4 балла.

Задача3

Обозначим скорость шарика до удара v, после удара — v'. Тогда

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{2gh_1}{2gh_0}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}. \qquad (6)$$

Так как доля теряемой энергии в системе отсчёта, где ракетка покоится, всегда одна и та же, то это соотношение верно для любых v и v'.

Пусть перед ударом ракетка движется со скоростью u, а теннисный шарик, летящий ей навстречу, со скоростью v_0. Перейдём в систему отсчёта, связанную с ракеткой. В ней шарик движется со скоростью $(v_0 + u)$. Скорость v_0 найдём из закона сохранения энергии: $v_0 = \sqrt{2gh_0}$. Согласно (6), скорость шарика относительно ракетки после удара $v_1 = (v_0+u)\sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$. Чтобы после отскока от ракетки шарик снова подпрыгнул на высоту h_0, его скорость относительно Земли должна быть равна v_0, то есть

$$u + v_1 = v_0 = \sqrt{2gh_0}.$$

Таким образом,

$$u + \left(u + \sqrt{2gh_0}\right)\sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{2gh_0},$$

откуда

$$u = \sqrt{2gh_0}\frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}}{\sqrt{h_0} + \sqrt{h_1}} = 0{,}25 \text{ м/с}.$$

Критерии оценивания

Соотношение между скоростями шарика сразу до и сразу после удара.....1
Переход в систему отсчёта, связанную с ракеткой.....2
Рассмотрение удара в системе отсчёта, связанной с ракеткой.....3
Переход в систему отсчёта, связанную с Землёй.....1
Окончательное выражение для u.....2
Численное значение u.....1

Задача 4

Задача . *Ответ.* $\mathcal{E} = \dfrac{7VU}{6V - 2U} = 10{,}4$ *В.*

Решение. Пусть сопротивления вольтметров равны, соответственно, R_1 и R_2, а внутреннее сопротивление батареи - r, *ЭДС* батареи - $\mathcal{E}$.

При последовательном соединении вольтметров через них течет одинаковый ток: $I = U_1/R_1 = U_2/R_2 \Rightarrow R_1 = (U_1/U_2)R_2 = 2R_2$. **1 балл**

Ток в цепи и показание первого вольтметра

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r} = \frac{\mathcal{E}}{3R_2 + r}, \quad U_1 = IR_1 = \frac{2\mathcal{E}R_2}{3R_2 + r}.$$ **2 балла**

Таким образом, $\dfrac{r}{R_2} = \dfrac{2\mathcal{E} - 3U}{U}$. **1 балл**

При параллельном подключении вольтметров напряжения на них равны $V = I_1R_1 = I_2R_2$. Так как $R_1 = 2R_2$, то $I_1 = \frac{1}{2}I_2$. **1 балл**

Полный ток в цепи и показание второго вольтметра

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + r} = \frac{3\mathcal{E}}{2R_2 + 3r} = I_1 + I_2 = \tfrac{3}{2}I_2,$$ **1 балл**

$$V = I_2R_2 = \frac{2I_0R_2}{3} = \frac{2\mathcal{E}R_2}{2R_2 + 3r}.$$ **1 балл**

Таким образом, $\dfrac{r}{R_2} = \dfrac{2(\mathcal{E} - V)}{3V}$. **1 балл**

Из условия $\dfrac{2\mathcal{E} - 3U}{U} = \dfrac{2(\mathcal{E} - V)}{3V}$ найдем $\mathcal{E} = \dfrac{7VU}{6V - 2U} = 10{,}4$ *В.*

2 балла

Задача . Электромагнитная индукция

Сразу после размыкания ключа сила тока в катушке останется равной I_0 (для скачкообразного изменения тока в катушке требуется бесконечное напряжение). Процесс дальнейшего изменения тока описывается уравнением:

$$L\dot{I} + RI = 0. \tag{13}$$

В начальный момент сила тока в катушке изменялась со скоростью:

$$\dot{I}(0) = -\frac{R}{L}I_0 = -0{,}1 \text{ А/с}.$$

Если бы эта скорость оставалась постоянной, то ток прекратился бы через

$$T = \frac{I_0}{|\dot{I}(0)|} = \frac{L}{R} = 1 \text{ с}.$$

Из уравнения (13) видно, что $\dot{I}$ со временем убывает, поэтому истинное время затухания тока больше. Поскольку $\tau \ll T$, то будем считать, что ток убывает с постоянной скоростью, тогда

$$\Delta I = \dot{I}(0)\tau = -\frac{R}{L}I_0\tau = -1 \text{ мА}.$$

При нахождении ΔI мы считали, что $\dot{I} = \text{const}$, хотя на самом деле скорость изменения силы тока меняется. Для оценки погрешности нашего результата будем считать, что $\dot{I}$ изменяется линейно со временем. Тогда погрешность δI равна площади заштрихованного треугольника (рис. 23):

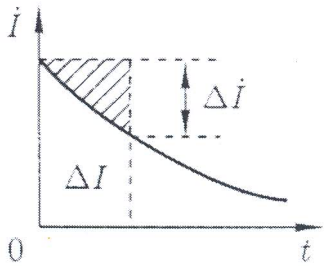

Рис. 23

$$\delta I = \frac{1}{2}\tau\Delta\dot{I} = \frac{1}{2}\tau\frac{R}{L}\Delta I.$$

Относительная погрешность

$$\frac{\delta I}{\Delta I} = \frac{\tau R}{2L} = 0{,}5\%.$$

Примечание. Уравнение (13) имеет точное решение:

$$I(t) = I_0 e^{-tR/L},$$

откуда

$$\Delta I = I(\tau) - I_0 = I_0\left(e^{-\tau R/L} - 1\right) = -0.995 \text{ мА} \approx -1 \text{ мА}.$$

Критерии оценивания

Запись уравнения, описывающего затухание тока в цепи 2
Выражение для $\dot{I}(0)$ 1
Выражение для T 1
Формула для ΔI 2
Численный ответ 2
Оценка относительной погрешности 2

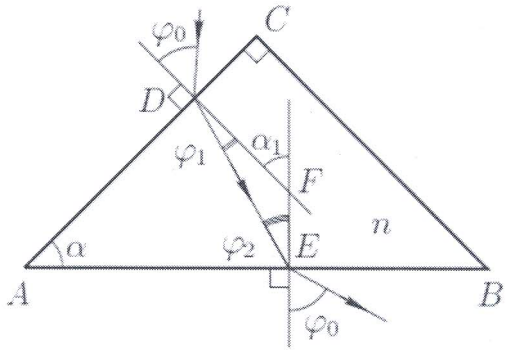

Рис. 24

Пусть показатель преломления стекла равен n. Выполним рисунок, поясняющий ход луча (рис. 24). Запишем закон Снелла для луча, преломляющегося на гранях AC и AB:

$$\text{для грани } AC: \quad \sin\varphi_0 = n\sin\varphi_1;$$

$$\text{для грани } AB: \quad n_0\sin\varphi_0 = n\sin\varphi_2.$$

Разделим почленно уравнение (17) на уравнение (16):

$$n_0 = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}.$$

Так как призма равнобедренная и прямоугольная, то угол $\alpha = 45°$. Для треугольника DEF угол α_1 — внешний. По теореме о внешнем угле треугольника:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha_1.$$

Заметим, что углы α и α_1 равны как углы со взаимно перендикулярными сторонами. С учётом двух последних соотношений получим:

$$n_0 = \frac{\sin(\alpha - \varphi_1)}{\sin\varphi_1} = \frac{\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1}{\sqrt{2}\sin\varphi_1} = \frac{1 - \operatorname{tg}\varphi_1}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Подставив в уравнение значение n_0, окончательно получим:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{3}{4\sqrt{2}+3} \approx 0{,}347,$$

откуда следует, что $\varphi_1 \approx 19{,}1°$.

Примерные критерии оценивания

Записан закон Снелла для границы AC 2
Записан закон Снелла для границы AB 2
Выражен показатель n_0 через φ_1 и φ_2 1
Найдена связь между φ_1 и φ_2 1
Показатель преломления n_0 выражен через φ_1 2
Найден угол φ_1 2