9 класс
Вариант 1

Ответы

1) Да, можно. $123456789 \to 222456789 \to 322356789 \to 422346789 \to 522345789 \to 622345689 \to 722345679 \to 822345678$.

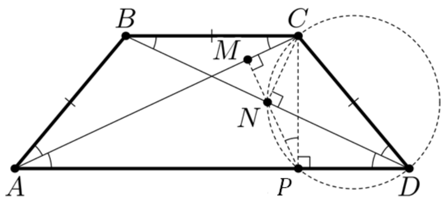
Ответ: да, можно.

2) После 6 может стоять только 3, аналогично, после 3 может стоять только 6. Получаем, что 3 и 6 стоят на последних местах в произвольном порядке. Так как 100 делится и на 1, и на 2, и на 4, и на 5, то после каждого из этих чисел может стоять любое натуральное число. Значит, сначала стоят 1, 2, 4, 5 в любом порядке, а потом 3 и 6, также в любом порядке. Итого получается $4! \cdot 2! = 48$ различных способов.

Ответ: 48.

3) Пусть цена одного ореха a сфунтиков. Условие задачи означает, что $9a < 100n$ и $10a > 100(n+1)$. Эти два условия равносильны следующему двойному неравенству: $10(n+1) < a < \frac{100n}{9}$. Отсюда $10(n+1) < \frac{100n}{9}$, т.е. $n > 9$. С другой стороны, для того, чтобы a нашлось однозначно, необходимо, чтобы в интервале $\left(10(n+1); \frac{100n}{9}\right)$ встретилось не больше одного целого числа, поэтому длина этого интервала должна быть не больше 2. Из неравенства $\frac{100n}{9} - 10(n+1) \le 2$ следует, что $n \le 10{,}8$. Так как n – целое число, $n = 10$, при других n однозначно стоимость ореха не найти. При $n = 10$ двойное неравенство имеет вид $110 < a < 111,(1)$, откуда $a = 111$.

Ответ: $n = 10$.



4) Заметим, что из равенства сторон трапеции следует равенство углов: $\angle CAD = \angle CAB = \angle BCA = \angle DBC = \angle CDB = \angle BDA$. Пусть M – основание перпендикуляра, опущенного из P на AC, а N – точка его пересечения с отрезком BD. Тогда $\angle MPC = 90^\circ - \angle MCP = \angle CAP$. Учитывая исходное равенство, получим, что $\angle NPC = \angle NDC$, то есть четырёхугольник $NPDC$ – вписанный. Следовательно, $\angle CND = \angle CPD = 90^\circ$, то есть CN – высота равнобедренного треугольника BCD, значит, N – середина BD.

5) Перепишем данное в условии равенство: $c + 1 = a - \frac{a}{b}$. Следовательно, число $\frac{a}{b}$ – натуральное, обозначим его k. Тогда $p^2 = c + 1 = k(b-1)$ для некоторого простого числа p. Возможны 3 варианта. Если $k = 1$, то $a = b$ и ab – квадрат натурального числа. Если $k = p$, то $b = p + 1$, $a = p^2 + p$ и $a + b = (p+1)^2$. Если $k = p^2$, то $b = 2$, $a = 2p^2$ и $ab = (2p)^2$.

9 класс
Вариант 2

Ответы

1) Да, можно. $2016 \to 2004 \to 1996 \ \to 2005 \ \ \to 2015$.

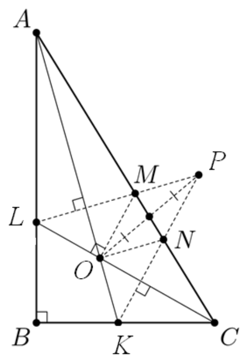
Ответ: да, можно.

2) Заметим, что после расстановки цифр 7, 8, 9, остальные цифры ставятся однозначно. Поэтому количество таких чисел равно $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

Ответ: 504.

3) Общий вес всех орехов, за исключением трёх самых лёгких и трёх самых тяжёлых, равен $100 - 25 - 35 = 40$ г. Пусть этих орехов n штук. Вес каждого из них больше веса самого тяжёлого ореха среди трёх самых лёгких, а он (по принципу Дирихле) больше, чем $\frac{25}{3}$ г. Аналогично, вес каждого из n орехов меньше веса самого лёгкого ореха из трёх самых тяжелых, который, в свою очередь, меньше, чем $\frac{35}{3}$ г. Имеем двойное неравенство $\frac{25}{3}n < 40 < \frac{35}{3}n$, которое равносильно неравенству $\frac{120}{35} < n < \frac{120}{25}$. Единственное натуральное число в полученном промежутке – это число 4. Значит, $n = 4$, а всего нашли $3 + 3 + 4 = 10$ орехов. Пример на 10 орехов легко строится: например, массы орехов в граммах (в порядке возрастания) таковы: $\frac{23}{3}, \frac{25}{3}, \frac{27}{3}, \frac{28}{3}, \frac{29}{3}, \frac{30}{3}, \frac{33}{3}, \frac{34}{3}, \frac{35}{3}, \frac{36}{3}$.

Ответ: 10 орехов.



4) Заметим, что $\angle AOC = 90^\circ + \frac{\angle B}{2} = 135^\circ$, а $\angle AOL = 180^\circ - \angle AOC = 45^\circ$. Пусть данные прямые пересекают сторону AC в точках M и N соответственно. Докажем, что $MONP$ – параллелограмм, откуда следует утверждение задачи (свойство диагоналей параллелограмма). Заметим, что треугольник LAM – равнобедренный (биссектриса совпадает с высотой). Тогда треугольник LOM – также равнобедренный с основанием LM. Но $\angle AOL = 45^\circ$, то есть $\angle COM = 90^\circ$. Следовательно, прямые MO и PK параллельны. Аналогично, $NO \parallel LP$, то есть $MONP$ – параллелограмм, что и требовалось.

5) Выражение, данное в условии, – квадратное уравнение относительно c. Его дискриминант, равный $8ab$, – точный квадрат. Значит и $2ab$ – точный квадрат. Другое решение можно получить, преобразовав исходное равенство

$$c^2 - a^2 - b^2 = 2(a-b)(c-a+b) \iff 2ab = (c-a+b)^2.$$