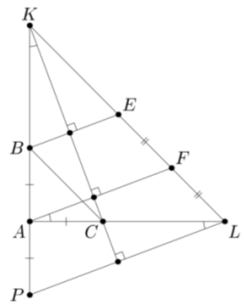
**8 класс**
**Вариант 1**

**Ответы**

1) Если в Кемерово не лыжные гонки, то в Саранске фигурное катание. Тогда фигурное катание не в Тюмени, значит, в Кемерово биатлон. Лыжные гонки остаются Тюмени, но по первому условию не может быть одновременно фигурное катание в Саранске и лыжные гонки в Тюмени. Пусть в Кемерово лыжные гонки. Если в Тюмени не фигурное катание, то в Кемерово биатлон – противоречие. Если в Тюмени фигурное катание, то в Саранске не может быть фигурное катание, значит, в Кемерово должны быть лыжные гонки. Тогда в Саранске биатлон.
**Ответ:** в Тюмени фигурное катание, в Кемерово лыжные гонки, в Саранске биатлон.

2) Проведем через точку $L$ прямую, перпендикулярную прямой $KC$. Пусть $P$ – точка пересечения этой прямой и прямой $AB$. Тогда $\angle AKC = \angle FAC = \angle ALP$ и $AL = AK$, следовательно, прямоугольные треугольники ALP и AKC равны по катету и прилежащему острому углу. То есть, $AP = AC = AB$. Поскольку прямые $BE$, $AF$ и $PL$ параллельны, то по теореме Фалеса $EF = FL$.




3) Рассмотрим числа, последними цифрами которых являются цифры 1, 3, 7 и 9. Перестановкой цифр числа, о котором идёт речь в задаче, можно получить число рассматриваемого вида, т.е. имеющее вид суммы четырёхзначного числа, цифры которого равны 1, 3, 7 и 9, и натурального числа $a$, оканчивающегося четырьмя нулями. При делении на 7 числа 1379, 1793, 3719, 1739, 1397, 1937, 1973 дают всевозможные остатки от 0 до 6, в чём легко убедиться непосредственно. Следовательно, если число $a$ при делении на 7 даёт остаток $r$, то прибавляя к нему число из указанной группы, дающее в остатке $7 - r$, получим число, делящееся на 7.

**Ответ:** да.

4) Из 12 преподавателей можно организовать $\frac{12\cdot 11}{2} = 66$ различных пар; на 30 собраниях поэтому присутствовало $30 \cdot 66 = 1980$ пар. Если олимпиаду составляли $n$ преподавателей, то общее число различных пар равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Имеем неравенство $\frac{n(n-1)}{2} \geq 1980$, откуда (учитывая, что $n$ неотрицательно) получаем $n > 64$.

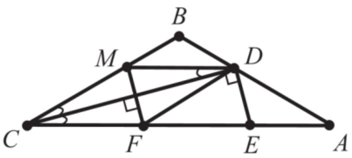
5) Будем называть прямоугольник $1\times 2$ доминошкой. Присоединим к каждой доминошке четыре клетки справа и снизу так, чтобы вместе с доминошкой они образовали прямоугольник $2\times 3$. Если у двух доминошек такие прямоугольники пересекаются, то у доминошек есть общая точка. Поэтому если 1004 доминошки, не имеющие общих точек, умещаются в квадрате $n\times n$, то все построенные по ним прямоугольники должны без наложений помещаться в квадрате $(n+1)\times(n+1)$, полученном добавлением к квадрату $n\times n$ строки снизу и столбца справа. Отсюда $(n+1) > 6 \cdot 1004 = 6024$. Поскольку $77^2 < 6024 < 78^2$, $n \geq 77$. Для $n = 77$ строится пример: разместив в первой, третьей, …, 77-й строках по 52 доминошки, не имеющие общих точек, получим $39\times 52 = 2028$ доминошек без общих точек.

**Ответ:** 77.

**8 класс**
**Вариант 2**
**Ответы**

1) Если у третьего не сосновая, то у первого еловая. Тогда еловая не у второго, значит, у третьего кедровая. Сосновая шишка остаётся второму, но по первому условию не может быть одновременно еловая у первого и сосновая у второго. Пусть у третьего сосновая шишка. Если у второго не еловая, то у третьего кедровая – противоречие. Если у второго еловая, то у первого не может быть еловая, значит, у третьего должна быть сосновая. Тогда у первого кедровая.

**Ответ:** у первого кедровая, у второго еловая, у третьего сосновая.



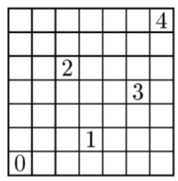

2) Проведем через точку $D$ прямую, параллельную основанию $AC$. Пусть эта прямая пересекает сторону BC в точке M. $\angle DCB = DCA$, так как $CD$ – биссектриса. $\angle CDM = \angle DCA$, как внутренние накрест лежащие. Отсюда треугольник $MCD$ – равнобедренный. Проведём через $D$ прямую, параллельную $BC$. Пусть она пересекает AC в точке F. Тогда четырёхугольник CFDM – параллелограмм с равными сторонами, т.е. ромб. Его диагонали перпендикулярны, поэтому $MF \parallel DE$, и четырёхугольник FMDE также является параллелограммом. Из равенства противоположных сторон параллелограмма имеем $CF = MD$ и $FE = MD$, поэтому $CE = 2MD = 2MC$. Остаётся заметить, что $MC = DA = 1$ в силу равнобедренности треугольника $ABC$.

**Ответ:** 2.

3) Заметим, что числа $N$ и $19N$ имеют одинаковые остатки при делении на 3, которые совпадают с остатками при делении на 3 сумм цифр этих чисел. Поэтому проводимые операции не меняют остаток от деления на 3 суммы всех находящихся на доске чисел. Но сначала он равен 2, а в конце 0.

**Ответ:** нельзя.

4) Из 10 преподавателей можно организовать $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ различных пар; на 40 собраниях поэтому присутствовало $40 \cdot 45 = 1800$ пар. Если олимпиаду составляли $n$ преподавателей, то общее число различных пар равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Имеем неравенство $\frac{n(n-1)}{2} \geq 1800$, откуда (учитывая, что $n$ неотрицательно) получаем $n > 60$.




5) Повернем доску на $90^{\circ}$ и будем перемещать монетку из левого нижнего угла в правый верхний. За каждый ход сумма координат клеток увеличивается не более чем на 4. Чтобы из левого нижнего угла доски переместиться в правый верхний угол, нужно увеличить эту сумму на $2 \cdot 74 = 148$. Для этого потребуется не менее $\frac{148}{4} = 37$ ходов. Заметим, что монетка перемещается только по клеткам, сумма координат которых чётна, причем клетки, у которых обе координаты нечётные, чередуются с клетками, у которых обе координаты чётные. Поскольку обе координаты левого нижнего угла и обе координаты правого верхнего угла нечётны, нам потребуется чётное число ходов. Значит, нужно сделать не менее 38 ходов. Покажем, что за 38 ходов проделать искомый путь можно. На рисунке показано, как за 4 хода попасть из левого нижнего в правый верхний угол доски 7×7. Далее нужно сделать 17 «горизонтальных» (то есть три шага вправо и одни вверх) ходов и 17 «вертикальных» (три шага вверх и один вправо) ходов.

**Ответ:** 38.