

ПЛЕХАНОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2015-2016

Заочный тур

11 класс

1. Двухзначное число в сумме с числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, является квадратом целого числа. Найти все такие числа. Ответ записать от меньшего числа к большему, разделяя их запятыми.
2. В резервах Большого Перестроечного Банка было, в пересчете на золото, 150 кг наличности, состоящей из долларов, евро и рублей, причем долларов 40%. В дальнейшем его объединили с Консервативным Банком, в резервах которого было, в пересчете на золото, 250 кг наличности, также состоящей из долларов, евро и рублей, причем евро 60%, а процентное содержание рублей такое же, как и в Большом Перестроечном Банке. В результате слияния организовался Банк Консервативной Перестройки, резервы которого на 30% состояли из рублей. Найти, какое количество евро и долларов(в пересчете на золото) было в его резервах. Ответ записать в виде двух чисел, разделенных точкой с запятой.
3. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $M$  и  $N$  - середины сторон  $AD$  и  $CD$ , соответственно. Найти объем треугольной пирамиды  $MNB_1 D_1$ , если сторона куба равна 3.
4. В копилке лежат монеты двухрублевого достоинства. Часть из них вынули, заменив рублевыми монетами. При этом общая сумма не изменилась, но вероятность вынуть рублевую монету из копилки втрое больше, чем двухрублевую. Какую долю двухрублевых монет вынули из копилки?
5. Решить уравнение в целых числах

$$|\dots||x - 1| - 1| - \dots| - 1| = 3,$$

где количество единиц равно 2015. Если ответов несколько, перечислить их в порядке возрастания, разделяя запятыми.

6. Найти значение выражения  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ , где  $x, y$  и  $z$  - положительные числа, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} x = x^2 + 2yz, \\ y = y^2 + 2xz, \\ z = z^2 + 2xy. \end{cases}$$

7. Найти значение  $\sin \alpha$ , если известно, что  $\alpha = \arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{12}{13} + \arccos \frac{63}{65}$ .
8. Решить неравенство  $|\sqrt{x-2} - 3| \geq |\sqrt{7-x} - 2| + 1$ . В ответе указать расстояние от наименьшего решения неравенства до наибольшего.
9. В некоторой арифметической прогрессии справедливо равенство  $\frac{a_{20}}{a_{60}} = -2n + 1$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Найти максимально возможный номер члена этой прогрессии, который равен 0.
10. Найти наибольшее значение произведения  $P = (5x + y)(1 - 5x)(5 - y)$ , при  $-0,2 \leq x \leq 0$  и  $2 \leq y \leq 4,5$ .