СОРОК ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 15 марта 2020 г.

1. В строку записано 2020 натуральных чисел. Каждое из них, начиная с третьего, делится и на предыдущее, и на сумму двух предыдущих. Какое наименьшее значение может принимать последнее число в строке?

А. Грибалко

2. На высотах AA_0, BB_0, CC_0 остроугольного неравностороннего треугольника ABC отметили соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что $AA_1 = BB_1 = CC_1 = R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

Е. Бакаев

3. На клетчатой плоскости отметили 40 клеток. Всегда ли найдётся клетчатый прямоугольник, содержащий ровно 20 отмеченных клеток?

М. Евдокимов

4. Для бесконечной последовательности $a_1, a_2, \ldots$ её *первая производная* — это последовательность $a'_n = a_{n+1} - a_n$ (где $n = 1, 2, \ldots$), а её k*-я производная* — это первая производная её $(k-1)$-й производной ($k = 2, 3, \ldots$). Назовём последовательность *хорошей*, если она и все её производные состоят из положительных чисел. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ — хорошие последовательности, то и $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots$ — хорошая последовательность.

Р. Салимов

5. На сфере радиуса 1 дан треугольник, стороны которого — дуги трёх различных окружностей радиуса 1 с центром в центре сферы, имеющие длины меньше π, а площадь равна четверти площади сферы. Докажите, что четырьмя копиями такого треугольника можно покрыть всю сферу.

А. Заславский

6. Дан бесконечный запас белых, синих и красных кубиков. По кругу расставляют любые N из них. Робот, став в любое место круга, идёт по часовой стрелке и, пока не останется один кубик, постоянно повторяет такую операцию: уничтожает два ближайших кубика перед собой и ставит позади себя новый кубик того же цвета, если уничтоженные одинаковы, и третьего цвета, если уничтоженные двух разных цветов. Назовём расстановку кубиков *хорошей*, если цвет оставшегося в самом конце кубика не зависит от того, с какого места стартовал робот. Назовём N *удачным*, если при любом выборе N кубиков все их расстановки хорошие. Найдите все удачные N.

И. Богданов