# 41-й Международный математический Турнир городов
## Осенний тур. Решения задач
## Базовый вариант, младшие классы

**1**. [4] Фокусник выкладывает в ряд колоду из 52 карт и объявляет, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф можно гарантировать успех фокуса?

*(Алексей Воропаев)*

**Ответ:** при крайних положениях. **Решение**. Тройку треф придётся выбросить, только если она в какой-то момент окажется в центре ряда, иначе можно выбросить другую карту. Так как ряд всегда содержит больше одной карты, то крайнюю карту можно сохранить до конца.

Пусть тройка треф $T$ сначала была не с краю. Приведём две стратегии для зрителя.

**Стратегия 1**. Зритель называет что угодно, кроме крайних чисел, не давая удалять крайние карты. Когда останется три карты, тройка треф (если она ещё будет на столе) окажется в центре. Зритель назовёт 2.

**Стратегия 2**. Пусть зритель всегда угадывает номер положения $T$. Фокусник будет выкидывать другую карту (у него нет выбора), уменьшая на единицу большее из расстояний от тройки треф до края. Значит, когда-то расстояния до краёв совпадут и придётся выкинуть тройку треф.

**2**. [4] Дана окружность ω с центром $O$ и две её различные точки $A$ и $C$. Для любой другой точки $P$ на ω отметим середины $X$ и $Y$ отрезков $AP$ и $CP$ и построим точку $H$ пересечения высот треугольника $OXY$. Докажите, что положение точки $H$ не зависит от выбора точки $P$. *(Артемий Соколов)*

**Решение**. Так как $YH \perp OX \perp AP$, то $YH \parallel AP$, а прямая $YH$ содержит среднюю линию треугольника $APC$. Аналогично, прямая $XH$ содержит среднюю линию этого треугольника. Эти средние линии пересекаются в точке $H$ – середине стороны $AC$.

**3**. [4] В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно три фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке? *(Егор Бакаев)*

**Ответ**. За 50 рублей.

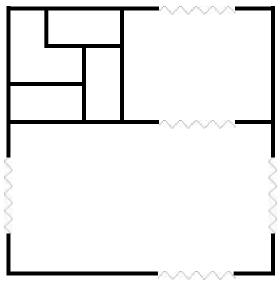
**Решение**. *Оценка*. Каждая фишка должна поменять чётность своего номера. Бесплатная операция не меняет чётность, а платная меняет её у двух фишек. Поэтому потребуется хотя бы 50 рублей.

*Пример*. Занумеруем фишки по порядку числами от 0 до 99. Покрасим клетки в четыре цвета: $abcdabcd\ldots d$. Бесплатная операция меняет фишки в соседних одноцветных клетках. Поэтому в клетках одного цвета фишки можно бесплатно переставить в любом порядке. Поменяем фишки во всех парах $bc$ и $da$ – это 49 платных операций. В клетках цвета $b$ и $c$ фишки уже можно расставить нужным образом бесплатно. В клетках цвета $a$ и $d$ сделаем так, чтобы фишки 0 и 99 встали рядом. Поменяем их последней платной операцией и дорасставим все фишки в нужном порядке.

**4**. [5] Даны целые числа $a_1, \ldots, a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2, \ldots, a_{1000}^2$. Сумма каждых 41 подряд идущих квадратов на круге делится на $41^2$. Верно ли, что каждое из чисел $a_1, \ldots, a_{1000}$ делится на 41? *(Борис Френкин)*

**Ответ:** верно. **Решение**. Из условия следует, что $a_{k+41}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ (индексы считаем зацикленными, то есть за 1000 следует 1). Значит, $a_{k+41n}^2 \equiv a_k^2 \pmod{41^2}$ при любом $n$. Так как числа 41 и 1000 взаимно просты, то квадраты всех чисел на круге дают при делении на $41^2$ один и тот же остаток. Следовательно, $41a_k^2$ делится на $41^2$, поэтому $a_k^2$ делится на 41, а поскольку 41 – простое число, то и $a_k$ делится на 41.

**5**. [5] У Васи есть неограниченный запас брусков $1\times1\times3$ и уголков из трёх кубиков $1\times1\times1$. Вася целиком заполнил ими коробку $m\times n\times k$, где $m$, $n$ и $k$ – целые числа, большие 1. Докажите, что можно было обойтись лишь уголками. *(Михаил Евдокимов)*



**Решение**. Так как $mnk$ делится на 3, то один из множителей делится на 3; пусть это высота $k$. Достаточно заполнить коробку $m\times n\times3$. Из двух уголков можно сложить *кирпич* $1\times2\times3$. Если $mn$ чётно, то основание коробки можно разбить на доминошки $2\times1$ и поставить на них по кирпичу, заполнив тем самым коробку. Иначе разобьём основание коробки на квадрат $3\times3$ и два прямоугольника (возможно пустых), см. рис. Прямоугольники разобьём на доминошки, а квадрат – как на рисунке. На доминошки поставим по кирпичу, а в оставшееся место положим три уголка. Коробка заполнена уголками.