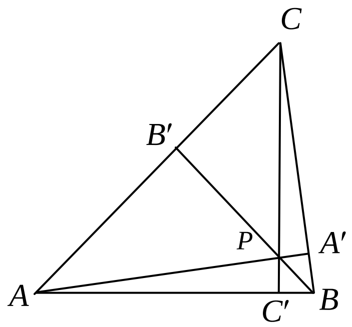
Сложный вариант, старшие классы

1. [5] Многочлен $P(x, y)$ таков, что для всякого целого $n \geq 0$ каждый из многочленов $P(n, y)$ и $P(x, n)$ либо тождественно равен нулю, либо имеет степень не выше n. Может ли многочлен $P(x, x)$ иметь нечётную степень? (*Борис Френкин*)

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть наибольшая степень, в которой встречается x, равна m, а наибольшая степень, в которой встречается y, равна n, Для определенности положим $n \geq m$. Запишем многочлен $P(x, y)$ в виде $A(x)y^n + B(x)y^{n-1} + \ldots$, где $A(x), B(x), \ldots$ – многочлены от x. Поскольку при всех целых $0 \leq k < n$ степень многочлена $P(k, y) = A(k)y^n + B(k)y^{n-1} + \ldots$ меньше n, то $A(0) = A(1) = \ldots = A(n-1) = 0$. У многочлена $A(x)$ есть n различных корней, поэтому его степень не меньше n. Но она не больше m, значит, $m = n$. При этом одночлен x^ny^n заведомо встречается в произведении $A(x)y^n$ и не встречается в остальных произведениях, поэтому $\deg P(x, x) = 2n$.

Замечание. Можно показать, что условию задачи удовлетворяют все многочлены следующего вида и только они: $c_0 + xy(c_1 + (x-1)(y-1)(c_2 + \ldots + (c_k + ((x-k)(y-k)c_{k+1})\ldots)$, где k – неотрицательное целое число, $c_0, \ldots, c_{k+1}$ – константы.

2. [5] Отрезки AA', BB' и CC' с концами на сторонах остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P внутри треугольника. На каждом из этих отрезков как на диаметре построена окружность, в которой перпендикулярно этому диаметру проведена хорда через точку P. Оказалось, что три проведённые хорды имеют одинаковую длину. Докажите, что P – точка пересечения высот треугольника ABC. (*Г. Гальперин*)



Решение. Пусть $2x$ – длина указанных хорд. По теореме о произведении отрезков хорд $x^2 = AP \cdot A'P = BP \cdot B'P = CP \cdot C'P$. По обратной теореме точки A, A', B и B' лежат на одной окружности. Значит, $\angle AA'B = \angle AB'B$.

Аналогично $\angle AA'C = \angle AC'C$, $\angle BB'C = \angle BC'C$. Следовательно, $\angle AA'B = \angle AB'B = 180° - \angle BB'C = 180° - \angle BC'C = \angle AC'C = \angle AA'C$, то есть AA' – высота. Аналогично BB' и CC' – высоты.

3. [6] Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 г, серебряные – по 2 г, медные – по 1 г. Как на чашечных весах без гирек определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание? (*Владислав Новиков*)

Решение 1. (*А. Шаповалов*) Назовём ситуацию *победной*, если проведено не более чем $k + 1$ взвешивание и определены веса k монет, причём среди них есть серебряная или две медных. В победной ситуации, сравнивая неизвестную монету с весом 2 г, мы определим её вес, увеличив число известных монет и число взвешиваний на 1 и так определим все монеты не более чем за 101 взвешивание.

В каждый момент будем сравнивать число *затронутых* (участвовавших во взвешиваниях) монет z с числом взвешиваний v. Сначала выделим одну монету и будем сравнивать незатронутые монеты с ней, пока не найдём монету другого веса. Пусть A – более лёгкая, а B – более тяжёлая из затронутых монет. Далее сравниваем незатронутые монеты с B, пока снова не получим неравенство. Теперь у нас $v = z - 1$; есть одна или несколько монет одинакового веса a, одна или несколько монет другого веса $b > a$ и одна монета C веса $c \neq b$. Сравним C с A. Возможны два случая.

1) $c = a$. Сравним B с $A+C$, то есть b с $2a$. Возможны варианты: $b = 3$, $a = 1$ (если $b > 2a$); $b = 2$, $a = 1$ ($b = 2a$); $b = 3$, $a = 2$ ($b < 2a$). Во всех случаях ситуация победная: $v = z + 1$, веса z монет определены и есть нужные монеты (с общим весом 2).

2) $c \neq a$. Значит a, b, c – три разных веса, они как-то упорядочены ($c > b > a$, $b > c > a$ или $b > a > c$), поэтому определены однозначно. При этом $v = z$ – ситуация победная.

Замечание. Иногда некоторые взвешивания можно не проводить: например, если C тяжелее B, то уже $c > b > a$; если при первом неравенстве уже есть ещё монета веса a, её можно взять за C.

Решение 2. (*А. Рябичев*) Сначала докажем по индукции следующее вспомогательное

Утверждение 1. Пусть есть k монет, среди которых все три типа представлены, причём про пару монет A, a уже известно, что $A > a$. Тогда можно определить, какая из k монет какого типа, за $k - 1$ взвешивание.

База. Если монет три, сравнив оставшуюся монету с A и с a, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты, кроме A и a. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и воспользоваться предположением индукции для $k - 1$ монеты. Если они не равны, скажем что получилась пара $B > b$. Теперь сравним $A+a$ и $B+b$. Если веса пар равны, то $A=B$ и $a=b$, так что мы можем выкинуть B и b (запомнив, что они совпадают по весу с A и a), и воспользоваться предположением индукции для $k - 2$ монет.

Пусть веса пар различны, для определённости, $A+a > B+b$. Заметим, что тогда обязательно $A = 3$ и $b = 1$. Монеты в паре (B, a) имеют либо веса (2,1), либо (2,2), либо (3,2). Итак, сравнив $A+b$ с $B+a$, мы однозначно восстановим веса всех четырёх монет. Среди них есть монета веса 2, будем сравнивать с ней все остальные монеты, на что уйдут оставшиеся $k - 4$ взвешивания. Утверждение 1 доказано.

Теперь выведем по индукции следующее утверждение, усиливающее требуемое в задаче:

Утверждение 2. Если есть k монет, среди которых все три типа представлены, то можно определить, какая монета какого типа, *за k взвешиваний*.

База. Если монет три, то, сравнив каждую с каждой, мы упорядочим их по весу.

Шаг. Сравним какие-нибудь две монеты. Если они равны, то одну можно отбросить (запомнив, с какой она совпадает по весу), и мы переходим к случаю $k - 1$ монеты, среди которых все типы представлены. Если они не равны, скажем, что образовалась пара $A > a$ и воспользуемся утверждением 1.

Замечание. Мы сделали на одно взвешивание меньше, чем предполагалось в условии. Кроме того, мы использовали только то, что сумма весов двух серебряных монет равна сумме весов медной и золотой; тот факт, что серебряная монета вдвое тяжелее медной, для данного решения не важен.

4. [10] Дана возрастающая последовательность положительных чисел

$$\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots,$$

бесконечная в обе стороны. Пусть b_k – наименьшее целое число со свойством: отношение суммы любых k подряд идущих членов данной последовательности к наибольшему из этих k членов не превышает b_k. Докажите, что последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ либо совпадает с натуральным рядом 1, 2, 3, ..., либо с некоторого момента постоянна. *(Иван Митрофанов)*

Решение. Очевидно, что $b_1=1$, а при $k > 1$ отношение из условия меньше k, поэтому $b_k \le k$ при всех натуральных k. Если последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ не совпадает с натуральным рядом, то $b_k \le k - 1$ при некотором k. Тогда $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+k-1} \le (k-1)a_{i+k-1}$ для каждого целого i, откуда $ka_i < (k-1)a_{i+k-1}$. Обозначив $t = \dfrac{k-1}{k} < 1$, получаем $a_i < ta_{i+k-1} < ta_{i+k}$ при всех целых i. Следовательно,

$$a_i < t\cdot a_{i+k} < t^2\cdot a_{i+2k} < \ldots < t^q\cdot a_{i+qk} < \ldots \qquad (*)$$

Фактически (так как (a_i) возрастает) мы доказали, что если есть два номера m и n, где $m > n$, то отношение $\dfrac{a_n}{a_m}$ меньше 1, когда $m - n < k$; $\dfrac{a_n}{a_m} < t$, когда $m - n < 2k$; $\dfrac{a_n}{a_m} < t^2$, когда $m - n < 3k$, и т.д. Чтобы оценить сверху произвольное b_n, оценим сверху отношение

$$\frac{a_{i+n} + a_{i+n-1} + \ldots + a_{i+1}}{a_{i+n}} = \frac{a_{i+n}}{a_{i+n}} + \frac{a_{i+n-1}}{a_{i+n}} + \ldots + \frac{a_{i+1}}{a_{i+n}}.$$

В этой сумме первые k слагаемых не превосходят 1, следующие k не превосходят t, следующие k не превосходят t^2 и т.д. Итак,

$$\frac{a_{i+n} + a_{i+n-1} + \ldots + a_{i+1}}{a_{i+n}} < k(1 + t + t^2 + \ldots) = \frac{k}{1-t} = k^2.$$

Это значит, что $b_n \le k^2$ при любом натуральном n. Поскольку последовательность (b_n), очевидно, не убывает, то она стабилизируется на числе, не большем k^2.

5. Точка M лежит внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на одинаковом расстоянии от прямых AB и CD и на одинаковом расстоянии от прямых BC и AD. Оказалось, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $MA\cdot MC + MB\cdot MD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$

а) [6] вписанный; **б**) [6] описанный. *(Наири Седракян)*

Решение. **а**) Опустим перпендикуляры MP, MQ, MR, MT на прямые AB, BC, CD, DA соответственно. Тогда $S_{ABCD} = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{CMD} + S_{DMA} \le (S_{AMP} + S_{BMP}) + (S_{BMQ} + S_{CMQ}) + (S_{CMR} + S_{DMR}) + (S_{DMS} + S_{AMT}) = (S_{AMP} + S_{CMR}) + (S_{BMP} + S_{DMR}) + (S_{BMQ} + S_{DMT}) + (S_{CMQ} + S_{AMT})$. Заметим, что прямоугольные треугольники AMP и CMR имеют равные катеты MP и MR, поэтому из них можно сложить треугольник Δ, две стороны которого равны MA и MC, а значит, $S_{AMP} + S_{CMR} = S_\Delta \le ½\, MA{\cdot}MC$. Аналогично $S_{BMP} + S_{DMR} \le ½\, MB{\cdot}MD$, $S_{BMQ} + S_{DMS} \le ½\, MB{\cdot}MD$, $S_{CMQ} + S_{AMS} \le ½\, MA{\cdot}MC$. Следовательно, $S_{ABCD} \le MA{\cdot}MC + MB{\cdot}MD$. Из условия видно, что все предыдущие неравенства на самом деле являются равенствами. Это значит, что, во-первых, точки P, Q, R, T лежат на соответствующих сторонах четырёхугольника и, во-вторых, треугольник Δ прямоугольный, то есть $\angle MAP + \angle MCR = 90°$. Аналогично $\angle MAD + \angle MCQ = 90°$, откуда $\angle BAD + \angle BCD = (\angle MAP + \angle MCR) + (\angle MAT + \angle MCQ) = 180°$, то есть четырёхугольник вписанный.

б) Из прямоугольного треугольника Δ (см. **а**) видно, что $AP + RC = \sqrt{MA^2 + MC^2}$. Аналогично $BP + RD = \sqrt{MB^2 + MD^2}$. Тогда $AB + CD = \sqrt{MA^2 + MC^2} + \sqrt{MB^2 + MD^2}$. Вычисляя похожим образом сумму $BC + DA$, мы получим тот же результат.

Замечание. Можно доказать, что площадь любого вписано-описанного четырёхугольника $ABCD$ равна $MA{\cdot}MC + MB{\cdot}MD$, где M – центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$.

6. Куб, состоящий из $(2n)^3$ единичных кубиков, проткнут несколькими спицами, параллельными рёбрам куба. Каждая спица протыкает ровно $2n$ кубиков, каждый кубик проткнут хотя бы одной спицей.

а) [6] Докажите, что можно выбрать такие $2n^2$ спиц, идущих в совокупности всего в одном или двух направлениях, что никакие две из этих спиц не протыкают один и тот же кубик.

б) [6] Какое наибольшее количество спиц можно гарантированно выбрать из имеющихся так, чтобы никакие две выбранные спицы не протыкали один и тот же кубик?

(Никита Гладков, Александр Зимин)

Решение. (*А. Шаповалов*) Пусть ребра куба параллельны осям координат.

а) Разобьём куб на слои толщиной 1, параллельные плоскости Oxy. Рассмотрим только спицы направлений Ox и Oy. В каждом слое найдём максимум числа таких спиц, идущих в одном направлении. Точно также найдём максимумы числа спиц для каждого слоя параллельного Oxz и параллельного Oyz. Пусть k – минимум из $6n$ этих максимумов.

Рассмотрим слой K, где максимум равен k. В слое можно выбрать $2n - k$ строк и $2n - k$ столбцов, через которые не проходят спицы слоя. На пересечении выбранных рядов есть $(2n - k)^2$ кубиков, их протыкают $(2n - k)^2$ спиц, перпендикулярных K. Покрасим эти $(2n - k)^2$ спиц в синий цвет. Выберем грань P куба, перпендикулярную слою K. Рассмотрим слои, параллельные P и не содержащие синих спиц. Их ровно k. В каждом таком слое можно выбрать не менее k спиц одного направления, всего не менее k^2 спиц. Добавим к ним синие спицы. По известному неравенству

$$k^2 + (2n - k)^2 \ge ½\,(k + (2n - k))^2 = 2n^2.$$

б) **Ответ**. $2n^2$ спиц. Выделим в нашем кубе два меньших куба со стороной n, примыкающие к противоположным вершинам. Они состоят из $2n^3$ единичных кубиков. Проткнём каждый выделенный кубик тремя перпендикулярными спицами. Тогда и все невыделенные единичные кубики тоже проткнуты. Заметим, что каждая спица протыкает ровно n выделенных кубиков. Значит, если спицы выбраны так, что никакой кубик не проткнут дважды, то спиц не более чем $2n^3 : n = 2n^2$.

7. [12] Некоторые из чисел 1, 2, 3, ..., n покрашены в красный цвет так, что выполняется условие: если для красных чисел a, b, c (не обязательно различных) $a(b - c)$ делится на n, то $b = c$. Докажите, что красных чисел не больше чем $\varphi(n)$. (*Александр Семенов*)

Лемма. Пусть D – некоторое множество различных простых делителей числа n. Количество натуральных чисел, не превосходящих n и не кратных ни одному числу из D, равно $n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Доказательство. Раскрыв скобки, получаем формулу включений-исключений. □

Пусть красных чисел больше $\varphi(n)$. Тогда некоторые красные числа имеют с n общий простой делитель. Пусть q – наибольшее из таких простых и a – красное число, кратное q. Для противоречия достаточно найти различные красные числа b и c, сравнимые по модулю $\frac{n}{q}$, а для этого достаточно показать, что $\varphi(n)$ не меньше количества возможных остатков красных чисел по модулю $\frac{n}{q}$.

Пусть D – множество всех простых делителей числа n, а D' – множество его простых делителей, превосходящих q. Красные числа не делятся на числа из D', поэтому и остатки от деления красных чисел на $\frac{n}{q}$ тоже не делятся на числа из D'.

По лемме, $\varphi(n) = n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right)$, а указанное количество остатков не больше, чем $\frac{n}{q}\prod_{p\in D,\, p>q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Достаточно доказать, что $n\prod_{p\in D}\left(1-\frac{1}{p}\right) \geq \frac{n}{q}\prod_{p\in D,\, p>q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Сокращая на n и на скобки, в которых $p>q$, получаем

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\prod_{p\in D,\, p<q}\left(1-\frac{1}{p}\right) \geq \frac{1}{q}, \quad \text{что равносильно неравенству} \quad q-1 \geq \prod_{p\in D,\, p<q}\frac{p}{p-1}.$$

Оно верно, поскольку $q - 1 = \frac{q-1}{q-2}\cdot\frac{q-2}{q-3}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}$.