

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 17 марта 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 5 1. На экране компьютера напечатано некоторое натуральное число, делящееся на 7, и отмечен курсором промежуток между какими-то двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что если её впечатать в отмеченный промежуток любое число раз, получится число, делящееся на 7.

Александр Галочкин

- 6 2. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

Сергей Дориченко

- 7 3. К плоскости приклеены два непересекающихся не обязательно одинаковых деревянных круга — серый и чёрный. Дан бесконечный деревянный угол, одна сторона которого серая, а другая — чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи угла, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная — чёрного (касание происходит не в вершине). Докажите, что внутри угла можно нарисовать луч, выходящий из вершины, так, чтобы при всевозможных положениях угла этот луч проходил через одну и ту же точку плоскости.

Егор Бакаев, Илья Богданов, Павел Кожевников, Владимир Расторгуев

- 8 4. В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n , — в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

Александр Грибалко

- 4 5. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1.
4 а) Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1?
4 б) А квадрат площади $1/2019$?

Михаил Евдокимов

- 8 6. Петя и Вася играют в игру. Для каждого пяти различных переменных из набора x_1, \dots, x_{10} имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. По правилам игры, когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?

Илья Богданов

- 12 7. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0; 0)$ и вершинами в целых точках, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует червяк — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

Ильке Чанакчи, Ральф Шиффлер