

# 40-й Международный математический Турнир городов

## Решения задач весеннего тура

### Сложный вариант

#### Младшие классы

1. [5] Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает семь различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?

*М. Евдокимов*

**Ответ:** могут. **Решение.** Пусть первый мудрец задумает числа 1, 2, 3, 22, 23, 24, 25 и назовёт число 22. Тогда второй однозначно определит все числа, так как сумму 100 при этом можно получить лишь одним способом — взяв наименьшие возможные числа: 1, 2, 3, 22, 23, 24 и 25.

**Замечание:** если первый задумает другие числа, то второй не сможет гарантированно угадать.

2. [7] На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

*С. Дориченко*

**Решение.** Назовём самого левого кузнечика Ричардом. Пусть тогда сначала все кузнечики, кроме Ричарда, перепрыгнут через Ричарда. Ясно, что теперь кузнечики находятся в положении, которое симметрично изначальному. Тогда они могут, используя ходы, симметричные тем, которые они бы делали при прыжках вправо, добиться требуемого.

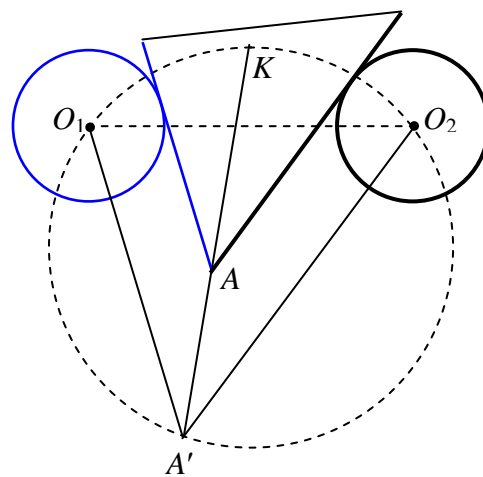
3. [7] К плоскости приклеены два непересекающихся деревянных круга одинакового размера — серый и чёрный. Дан деревянный треугольник, одна сторона которого серая, а другая — чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи треугольника, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная — чёрного (касание происходит не в вершинах). Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла между серой и чёрной сторонами, всегда проходит через одну и ту же точку плоскости.

*Е. Бакаев, П. Кожевников, В. Расторгуев*

**Решение.** Точки биссектрисы угла  $A$  между серой и чёрной сторонами деревянного треугольника равноудалены от этих сторон (серый цвет изображаем синим). Проведём через центры  $O_1$  и  $O_2$  серого и чёрного кругов прямые, параллельные этим сторонам. Пусть они пересекаются в точке  $A'$ . Поскольку угол  $O_1A'O_2$ , равный углу  $A$ , постоянен, описанная окружность  $\Omega$  треугольника  $O_1A'O_2$  не зависит от положения исходного треугольника.

Прямая  $l$ , содержащая биссектрису угла  $O_1A'O_2$ , проходит тогда через фиксированную точку  $K$  — середину дуги  $O_1O_2$  окружности  $\Omega$ .

С другой стороны, точки прямой  $l$  равноудалены от прямых  $O_1A'$  и  $O_2A'$ , а серая и чёрная стороны «отодвинуты» соответственно от  $O_1A'$  и  $O_2A'$  на одно и то же расстояние в сторону точки  $K$  (так как радиусы серого и чёрного кругов равны), откуда прямая  $l$  содержит и биссектрису угла  $A$  деревянного треугольника.



4. [8] Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили – в красный цвет, если между его концами чётное число вершин, и в синий – в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках – произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

*И. Богданов*

**Ответ.**  $\frac{1}{2}$ . **Решение.** Пусть в вершинах по кругу расставлены числа  $x_1, \dots, x_{100}$ , и пусть  $k$  – сумма «красных» чисел, а  $s$  – «синих». Тогда сумма красных чисел равна сумме всех одночленов вида  $x_i x_j$ , где  $i$  и  $j$  разной чётности и  $i < j$ , а сумма синих равна сумме всех одночленов вида  $x_i x_j$ , где  $i$  и  $j$  одной чётности и  $i < j$ ; кроме того,  $(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_{100})^2 = 1$ . Заметим теперь, что выражение  $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{99} - x_{100})^2$  равно  $1 - 2k + 2s$  и неотрицательно, откуда  $k - s \leq \frac{1}{2}$ . Равенство достигается, когда выражение в скобках равно нулю, например, при  $x_1 = x_2 = \dots = x_{100} = \frac{1}{10}$ .

5. [9] В клетках квадратной таблицы  $n \times n$ , где  $n > 1$ , требуется расставить различные целые числа от 1 до  $n^2$  так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на  $n$ , – в разных строках и в разных столбцах. При каких  $n$  это возможно?

*А. Грибалко*

**Ответ:** при всех чётных  $n$ .

**Решение.** Пронумеруем столбцы и строки от 1 до  $n$  соответственно слева направо и сверху вниз, а также раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы угловая клетка в первом столбце и первой строке была чёрной.

Пусть  $n$  – чётное. Заполним таблицу числами от 1 до  $n^2$  так: ставим их друг за другом, начиная от 1, сначала в первой строке слева направо, а потом – вдоль столбцов: вниз по последнему столбцу, вверх по предпоследнему, и т. д. (получается что-то похожее на змейку). В итоге число  $n^2$  окажется прямо под 1, см. пример для  $n = 6$  на рисунке.

1	2	3	4	5	6
36	27	26	17	16	7
35	28	25	18	15	8
34	29	24	19	14	9
33	30	23	20	13	10
32	31	22	21	12	11

Заменяем теперь числа на их остатки по модулю  $n$ : 0, 1, ...,  $n - 1$  (см. рисунок). Нетрудно доказать, что они расставлены следующим образом: для нечётного столбца последнее (нижнее) число совпадает с первым числом следующего чётного столбца и вторым числом следующего нечётного.

1	2	3	4	5	0
0	3	2	5	4	1
5	4	1	0	3	2
4	5	0	1	2	3
3	0	5	2	1	4
2	1	4	3	0	5

Значит, каждый столбец начинается с остатка  $i$ , равного своему номеру, кроме  $n$ -го, который начинается с нуля, причём в чётных столбцах остатки идут по возрастанию с  $i$  до  $n - 1$ , а потом с нуля до  $i - 1$ , а в нечётных – по убыванию с  $i$  до 0, а потом с  $n - 1$  до  $i + 1$ .

Докажем, что в каждой строке все остатки различны. Пусть в какой-то строке совпали два остатка. Они не могут находиться в столбцах одной чётности – такие столбцы получаются друг из друга циклическим сдвигом. Значит, один остаток находится в чётном столбце, а второй – в нечётном. Но тогда эти два остатка стоят на клетках разного цвета и не могут совпадать, противоречие.

Предположим, что удалось заполнить таблицу при нечётном  $n$ . К противоречию можно прийти по-разному.

**Первый способ.** Заметим, что в нашей шахматной раскраске чёрными окажутся те клетки, сумма номеров строки и столбца которых чётна, а белыми – остальные. В нашей змейке чисел от 1 до  $n^2$  цвета клеток чередуются, поэтому числа одной чётности находятся в чёрных клетках, а другой чётности – в белых.

Рассмотрим клетки таблицы, в которых стоят числа, дающие остаток  $k$  при делении на  $n$ . Сумма их номеров строк и столбцов по условию равна  $(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$ , так как каждая строка и каждый столбец участвуют по одному разу; в частности, эта сумма чётна. Но у

каждой белой клетки сумма «координат» нечётна, а у каждой чёрной – чётна, следовательно, число белых клеток среди рассмотренных чётно.

Взяв  $k=1$  и  $k=2$ , получаем, что среди чисел с остатком 1 чётное количество находится на белых клетках, и среди чисел с остатком 2 – тоже. Но для каждого числа с остатком 1 следующее за ним число имеет остаток 2 и стоит на клетке противоположного цвета. Значит, на чёрных клетках стоит чётное количество чисел с остатком 2 и всего чисел с остатком 2 чётно – противоречие с нечётностью  $n$ .

**Второй способ.** Заменяем числа на их остатки от деления на  $n$  и проведём стрелку из каждой клетки с единицей в соседнюю клетку с двойкой. У нас имеется  $n$  стрелок, соединяющих единицы и двойки. У некоторых стрелок могут быть *парные* – стрелки противоположного направления, занимающие те же два ряда (рис. слева). Но число стрелок нечётно, поэтому найдётся стрелка без пары.

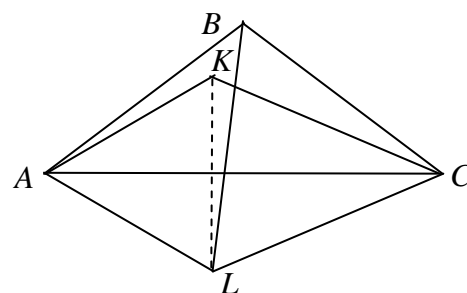
						$i$	$i+1$	$i+2$	$i+3$			$n$
	1 → 2								1 → 2			
							1 → 2					
												1
	2 ← 1							1 → 2				
											1 → 2	
						1 → 2						

Пусть, например, такая стрелка горизонтальна и ведёт из  $i$ -го столбца в  $(i+1)$ -й (рис. справа). В  $(i+1)$ -м столбце тоже есть единица. Поскольку у первой стрелки нет пары, вторая стрелка может вести только в  $(i+2)$ -й столбец (двойка в  $(i+1)$ -м столбце уже занята). В  $(i+2)$ -м столбце тоже есть единица, и стрелка из неё может вести только в  $(i+3)$ -й столбец (двойки в  $(i+1)$ -м и  $(i+2)$ -м столбцах уже заняты). Продолжая, дойдём до единицы в  $n$ -м столбце, откуда стрелке идти уже некуда. Противоречие.

6. [9] Внутри равнобедренного треугольника  $ABC$  отмечена точка  $K$  так, что  $CK = AB = BC$  и  $\angle KAC = 30^\circ$ . Найдите угол  $AKB$ .

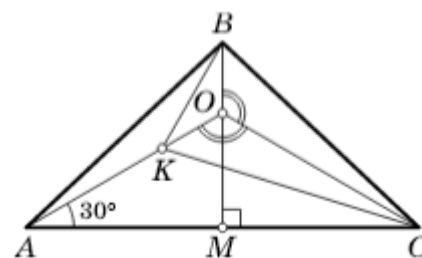
Е. Бакаев

**Ответ.**  $150^\circ$ . **Решение 1.** Построим равносторонний треугольник  $BCL$  (см. рисунок; точки  $A$  и  $L$  находятся по одну сторону от прямой  $BC$ ). Точки  $A$ ,  $C$  и  $L$  лежат на окружности радиуса  $BA$  с центром в точке  $B$ . Поскольку  $K$  лежит внутри треугольника  $ABC$ , угол  $ABC$  больше  $60^\circ$ , откуда  $L$  и  $B$  лежат по разные стороны от  $AC$  и  $L$  лежит на меньшей дуге  $AC$ . Тогда вписанный угол  $CAL$  равен половине центрального угла  $CBL$ , то есть  $30^\circ$ .



Очевидно, точка  $K$ , удовлетворяющая условиям задачи, единственна, следовательно она совпадает с точкой, симметричной  $L$  относительно стороны  $AC$ . Значит, треугольник  $AKL$  равносторонний, точка  $K$ , как и точка  $B$ , лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AL$ , откуда  $\angle AKB = \angle LKB = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle AKL = 150^\circ$ .

**Решение 2.** Пусть высота  $BM$  треугольника  $ABC$  пересекается с прямой  $AK$  в точке  $O$  (см. рисунок). Тогда  $\angle COM = \angle AOM = 60^\circ$ . Значит,  $\angle AOC = 120^\circ$  и  $\angle COB = 120^\circ$ . Следовательно, треугольники  $BOC$  и  $KOC$  равны по двум сторонам и углу, лежащей против *большой* из них (так называемый четвёртый признак равенства треугольников). Поэтому  $OB = OK$ , то есть треугольник  $BOK$  равнобедренный с углом  $120^\circ$  при вершине  $O$ . Поэтому  $\angle OKB = 30^\circ$ , а  $\angle AKB = 150^\circ$ .



**Решение 3.** Построим на  $AC$  равносторонний треугольник  $ACL$  так, чтобы точки  $L$  и  $B$  лежали с одной стороны от  $AC$  (см. рис).

Проведем в треугольнике  $ABC$  высоту  $BM$ , она же серединный перпендикуляр к стороне  $AC$ . Так как  $ALC$  – равносторонний, точка  $L$  также лежит на прямой  $BM$ . Кроме этого, проведем в треугольнике  $ALC$  высоту  $AN$ . Так как  $AN$  является биссектрисой угла  $LAC$ , то точка  $K$  лежит на этой прямой. Отметим также, что  $K$  лежит с той же стороны от  $BM$ , что и  $A$ , так как из-за  $CK = CB$  она не может лежать внутри треугольника  $BMC$ ; таким образом,  $K$  лежит на отрезке  $AN$ .

Заметим, что прямоугольные треугольники  $BMC$  и  $KNC$  равны по катету и гипотенузе (так как  $MC = AC/2 = LC/2 = NC$ ,  $BC = KC$ ). Отсюда следует, во-первых, что  $BM = KN$ , во-вторых, что  $B$  лежит на отрезке  $LM$  (так как  $BM = KN < AN = LM$ ), и, наконец, что  $LB = LM - BM = AN - KN = AK$ .

Теперь рассмотрим четырехугольник  $ALBK$ . В нем  $\angle LAK = \angle ALB = 30^\circ$  и  $AK = LB$ , то есть это равнобокая трапеция. Отсюда следует, что  $\angle AKB = 180^\circ - \angle KAL = 150^\circ$ .

**Решение 4.** Пусть  $\angle B = 2\beta$ . По теореме синусов  $2BC \sin \beta = AC = KC \frac{\sin \angle AKC}{\sin 30^\circ} = 2BC \sin \angle AKC$ , и поскольку  $\angle AKC > 2\beta > \beta$ , то  $\angle AKC = 180^\circ - \beta$ . Значит,  $\angle ACK = \beta - 30^\circ$ , откуда  $\angle KCB = \angle C - \angle ACK = (90^\circ - \beta) - (\beta - 30^\circ) = 120^\circ - 2\beta$ ,  $\angle BKC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KCB) = 30^\circ + \beta$ ,  $\angle AKB = 360^\circ - \angle BKC - \angle AKC = 360^\circ - (30^\circ + \beta) - (180^\circ - \beta) = 150^\circ$ .

7. [12] Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить?

М. Дидин

**Ответ.** 3920000. **Решение.** Оценка. Будем считать, что камни в кучках лежат один на другом, причём из выбранных кучек Петя берет верхние (на данный момент) камни. Пронумеруем камни в каждой кучке снизу вверх числами от 1 до 400. Тогда число очков, которое Петя получает на каждом ходу, равно разности номеров удаляемых камней. В результате он получит сумму вида  $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{39999} - a_{40000}|$ , где  $a_i$  – номера соответствующих камней.

Заметим, что после раскрытия скобок получается алгебраическая сумма  $S$  ста чисел 400, ста чисел 399, ..., ста двоек и ста единиц, причём ровно перед половиной этих чисел стоит знак минус.

Назовём числа от 1 до 200 *маленькими*, а остальные – *большими*. Если бы разрешалось брать из кучек произвольные камни, то максимальное значение  $S$ , очевидно, достигается, когда все большие числа входят в  $S$  со знаком плюс, а все маленькие – со знаком минус. Такая сумма равна  $100(400 + 399 + \dots + 201 - 200 - 199 - \dots - 1) = 100((400 - 200) + (399 - 199) + \dots + (201 - 1)) = 100 \cdot 200^2$ .

Заметим, однако, что каждое большое число хотя бы один раз войдёт в сумму со знаком минус: это произойдёт, например, в тот момент, когда Петя *в первый раз* удалит камень с этим номером. Аналогично каждое из 200 маленьких чисел хотя бы один раз войдёт в сумму в сумму со знаком плюс (в тот момент, когда Петя удалит *последний* камень с этим номером). Поэтому максимальный результат Пети не превышает

$$99 \cdot (400 + 399 + \dots + 201) - 99 \cdot (200 + 199 + \dots + 1) - (400 + 399 + \dots + 201) + (200 + 199 + \dots + 1) = 98 \cdot 200^2.$$

*Пример.* Добиться указанного результата можно, например, так. За первые 200 ходов Петя забирает по 200 камней из первых двух кучек (при этом 200 больших чисел – каждое по разу – получают знак минус). За следующие 200 ходов он снимает 200 верхних камней из третьей кучки и 200 нижних из первой кучки, далее по 200 камней из второй и четвертой, третьей и шестой, ..., 98-й и 100-й кучек (при этом все числа входят с «правильными» знаками). Наконец остаётся по 200 нижних камней в последних двух кучках, которые и снимаются за последние 200 ходов (и возникает 200 знаков плюс перед числами с 200 по 1).