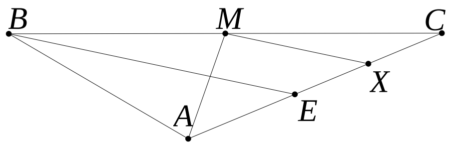
40-й Международный математический Турнир городов
Решения задач осеннего тура
Младшие классы.

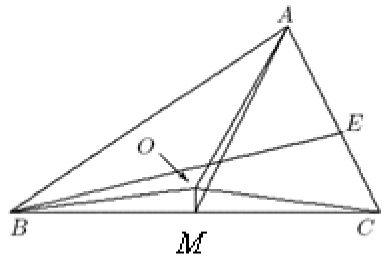
Сложный вариант

1. [5] *В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, точка E – произвольная точка внутри стороны AC. Известно, что* $BE \ge 2AM$. *Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.*

(Н. Седракян)



Решение 1. Пусть X – середина отрезка EC. Тогда $MX = {}^{BE}/_{2}$. Как известно, чевиана треугольника меньше хотя бы одной из сторон, выходящих из той же вершины (это следует, например, из свойств наклонных и проекций). По условию, $MX \ge MA$, значит, $MX < MC$. Тем более, $MA < MC$. Следовательно, точка A лежит внутри круга с диаметром BC. А это и значит, что угол A тупой.



Решение 2. Пусть угол A не тупой. Тогда центр O описанной окружности треугольника ABC лежит на BC или по ту же сторону от BC, что и вершина A. Значит, $2AM \ge 2AO = OB + OC \ge BC > BE$. Противоречие.

Решение 3. (*Арбуханова Гульжаган*) Достроим треугольник до параллелограмма $ABDC$. Пусть AM и BE пересекаются в точке Y. Так как треугольники AYE и DYB подобны и $BE \ge 2AM = AD$, то $BY \ge YD$. Сравнивая это с неравенством треугольника $YM + MB > BY$, получим $MB > MD$. То есть BC – большая диагональ параллелограмма. Это и значит, что угол A тупой.

2. [6] *На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?*

(М. Кузнецов)

Ответ. 1009 подпевал. **Решение**. Назовём рыцарей и лжецов *приниципиальными* людьми.

Оценка. **Первый способ**. (*Бучаев Абдулкадыр*) Будем следить за *балансом* – разностью количеств ответов «Да» и «Нет». В начале и в конце баланс нулевой, с каждым ответом он изменяется на 1. Нулевые значения баланса разбивают ряд жителей на группы. Внутри каждой группы баланс сохраняет знак. Подпевалы всегда увеличивают модуль баланса. Поэтому, чтобы сделать баланс нулевым, принципиальных жителей должно быть не меньше чем подпевал. Это справедливо для каждой группы, а значит, и для всех жителей острова.

Второй способ. Подпевала не мог увеличивать минимум из текущих количеств «Да» и «Нет». Так как этот минимум увеличился от 0 до 1009, причём с каждым ответом он изменялся не более чем на единицу, то принципиальных жителей хотя бы 1009.

Пример. Сначала все 1009 подпевал сказали «Нет», а потом 1009 рыцарей сказали «Да».

Замечание. Любой строй из 1009 принципиальных жителей можно проредить подпевалами так, чтобы выполнялось условие.

3. [8] *Требуется записать число вида 77…7, используя только семёрки (их можно писать и по одной, и по нескольку штук подряд), причём разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа 77 самая короткая запись – это просто 77. А существует ли число вида 77…7, которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семёрок, чем в его десятичной записи?*

(С. Маркелов)

Ответ. Существует. **Решение 1**. Заметим, что $\underbrace{7\ldots7}_{n} = \frac{10^n - 1}{9} \cdot 7 = \frac{7 \cdot 10^n - 7}{9}$. Число 10 можно записать как (77 – 7):7, а 9 – как 7 + (7 + 7):7. В качестве *n* можно взять 77 или 14 = 7 + 7.

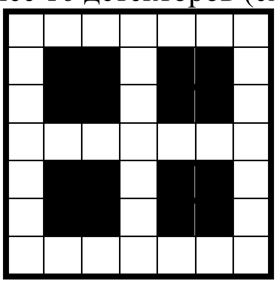
Замечание. В этом решении использовано 12 семёрок. Заменив (77 – 7):7 на 7 + (7 + 7 + 7):7 можно обойтись без использования двузначных чисел.

Решение 2. (*Будун Будунов*) $\underbrace{7\ldots7}_{14} \cdot \left(\left(\frac{77-7}{7} \right)^{7+7} + \frac{7}{7} \right) = \underbrace{7\ldots7}_{28}$.

4. [8] *Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2. Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?*

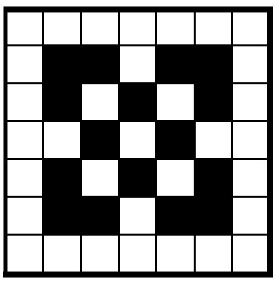
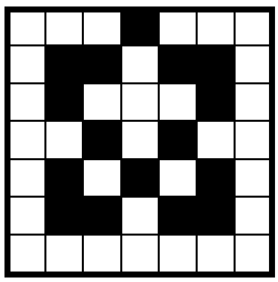
(Р. Женодаров)

Ответ. 16 детекторов. **Решение**. *Оценка*. В каждом прямоугольнике 2×3 должно быть хотя бы два детектора: прямоугольник состоит из трёх доминошек 1×2, полосок, и если детектор в крайней доминошке, мы можем не понять, есть ли корабль на двух других доминошках, а если детектор в средней доминошке, мы можем не понять, какую из крайних доминошек занимает корабль вместе со средней доминошкой. Поэтому всего должно быть не менее 16 детекторов (см. рис. слева).

Пример. На правом рисунке чёрным указано расположение 16 детекторов. Всякий корабль пересекается ровно с одним чёрным квадратом 2×2 по одной клетке, по двум соседним или по всем четырём. В любом случае однозначно определяется положение корабля или его отсутствие.

Замечание. 16 детекторов можно расположить только тремя принципиально различными способами. Один указан в решении, остальные два см. на рисунке ниже.

5. [8] *Равнобокая трапеция ABCD с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Прямая BO пересекает отрезок AD в точке E. Пусть O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников ABE и DBE соответственно. Докажите, что точки O_1, O_2, O, C лежат на одной окружности.*

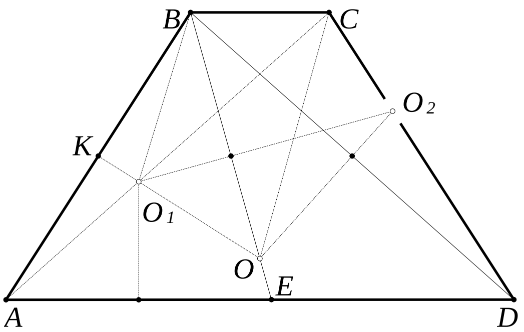
(А. Заславский)

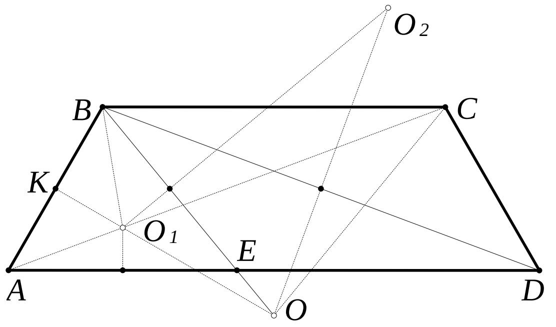
Нетрудно понять, что *AD* – большее основание, треугольник *AEB* остроугольный, и точки *B*, *C* и O_2 лежат по одну сторону от прямой OO_1. Прямые OO_1, O_1O_2 и OO_2 – серединные перпендикуляры к

AB, BE и BD соответственно. Пусть K – середина AB.

Первый способ. Так как $\angle BO_1O_2 = \angle BAD = \angle BOO_2$ (половина центрального угла равна вписанному для треугольников BAE и BAD), то, четырёхугольник OO_1BO_2 вписанный. Поскольку $\angle KO_1B = \angle AEB = \angle CBE = \angle CBO = \angle BCO$, то четырёхугольник OO_1BC вписанный.

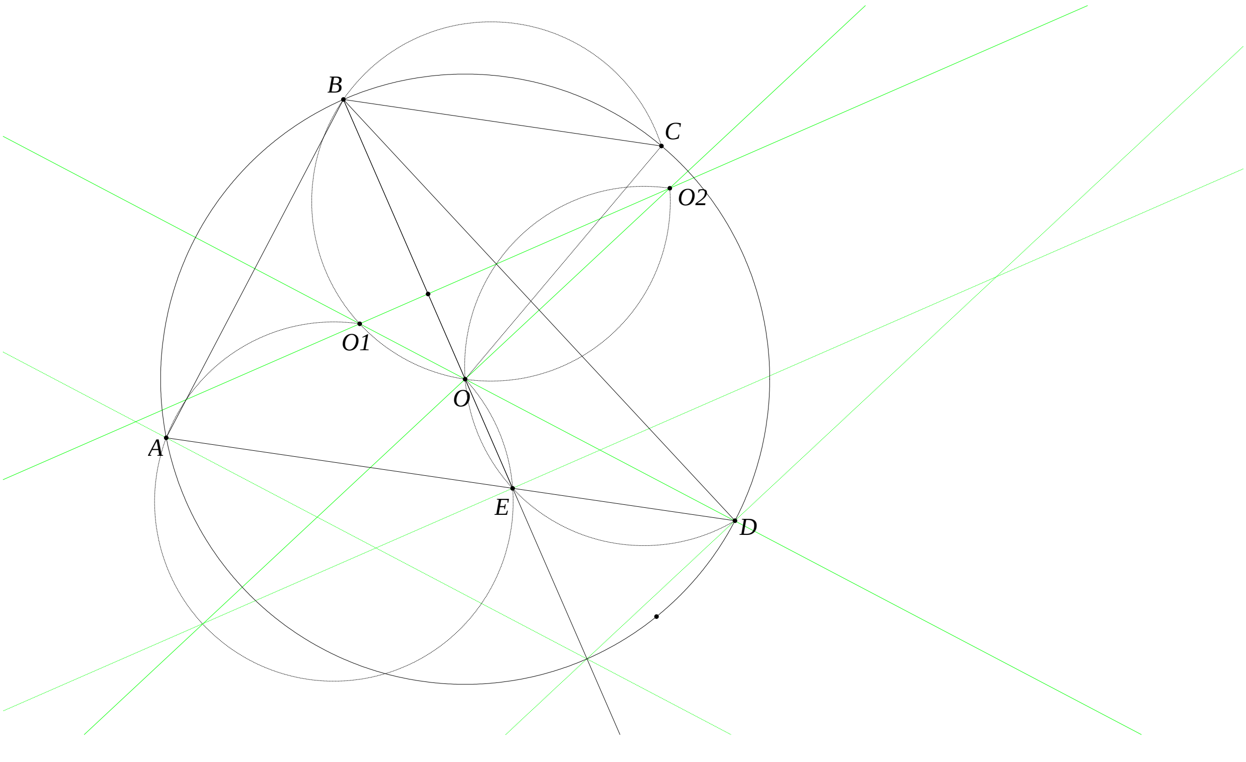
Поэтому точки O, O_1, B, C, O_2 лежат на одной окружности.



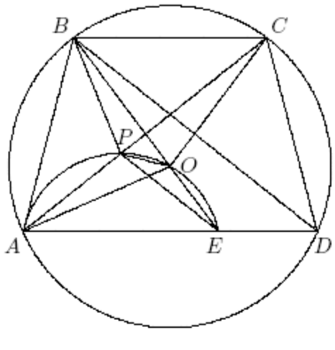


Второй способ. Заметим, что $\angle EAO_1 = 90° - \angle ABE = \angle KOB = \angle ADB = \angle CAD$. Значит, точка O_1 лежит на прямой AC. Поэтому $\angle OCO_1 = \angle EBD = 90° - \angle BOO_2 = \angle OO_2O_1$. Следовательно, точки O, O_1, C, O_2 лежат на одной окружности.

Замечание. Аналогично можно показать, что точка O_2 лежит на луче (но не обязательно на отрезке) DC; точки A, E, O, O_1 лежат на одной окружности; точки D, E, O, O_2 лежат на одной окружности.



Третий способ. Рассмотрим только случай, когда точка O лежит внутри трапеции. Пусть диагональ AC пересекает описанную окружность треугольника OAE в точке P. Тогда $\angle OEP = \angle OAP = \angle OCP$, поэтому $\angle PEA = \angle BEA - \angle OEP = \angle OCB - \angle OCP = \angle ACB = \angle PAE$. Следовательно, $PA = PE$. С другой стороны, $\angle BOP = \angle PAE = \angle PEA = \angle POA$. Значит, треугольники POB и POA равны, а $PB = PA$. Таким образом, точка P совпадает с O_1. Аналогично доказывается, что точка O_2 лежит на луче CD. Поэтому $\angle OCO_1 = \angle DBE = \angle OO_2O_1$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами), что и требовалось.



6. Докажите, что

а) [7] *любое число вида* $3k - 2$, *где* k *целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;*

б) [3] *любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.*

(Н. Седракян)

а) Достаточно заметить, что $k^3 - (k + 3)^3 + (3k + 5)^2 = 3k - 2$. **б**) Вычтем из числа, которое нужно представить, такой куб (0, 1 или –1), чтобы результат имел вид $3k - 2$, и применим пункт **а**).

7. *В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причём из каждого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом можно, начав движение из какого-то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться в этот город, государство называется сложным, иначе – простым. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что*

а) [5] *в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;*

б) [7] *в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя.*

(М. Дидин)

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, а рёбрами – дороги.

а) Условие означает, что граф – дерево. Петя выбирает произвольную вершину. От каждой вершины существует ровно один путь в выбранную. Все рёбра на этом пути он ориентирует в сторону выбранной вершины.

Первым ходом Петя перемещает туриста в выбранную вершину. Все ориентированные пути ведут к туристу. Вася разворачивает одно ребро. Турист идёт по нему. Ясно, что все пути снова ведут к нему. Вася снова разворачивает одно ребро и так далее. Поэтому у Пети всегда есть ход и он не проиграет.

б) По условию граф связен и содержит цикл. Будем доказывать индукцией по количеству вершин, что Вася может гарантировать себе победу, причём для любой изначальной расстановки стрелок перед его ходом (включая «невозможный» случай, когда все стрелки ведут из вершины, где стоит фишка перед первым ходом Васи).

База – простые циклы. Пусть в простом цикле $A_1A_2\dots A_n$ как-то расставлены стрелки на рёбрах и турист смог сделать ход, пойдя из A_1 в A_2. Вася будет разворачивать стрелки перед ним. Поэтому турист не сможет идти в обратную сторону. Допустим, турист смог дойти до A_1. Тогда перед ним разворачивают стрелку, и ему некуда идти. Петя проиграл.

Шаг индукции. Граф не является простым циклом. Выберем в нём цикл C минимальной длины. Ясно, что C – простой и не содержит ребёр внутри себя. Поэтому есть вершины вне C. Выберем из них вершину V с максимальным расстоянием до C. Обозначим граф без V буквой G. Ясно, что G связен и содержит цикл.

По предположению индукции в G есть выигрышная стратегия для Васи при любой ориентации рёбер. Внутри G Вася будет следовать ей. Так как в G Петя проигрывает, то турист вынужден будет когда-то пойти в V. Тогда Вася развернёт эту стрелку. Турист выйдет из V, а Вася сделает любой допустимый ход в G. Турист пойдёт внутри G. Сейчас у Васи опять есть выигрышная стратегия в G, которой он и будет следовать. Турист снова будет вынужден зайти в V, уменьшив количество стрелок, идущих из G в V. В конце концов они кончатся, и Петя проиграет в G, если он не проиграл раньше.