40-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура

Базовый вариант

Младшие классы

1. [3] В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 20. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 3. Могло ли быть выписано больше 10 чисел?

А. Шаповалов

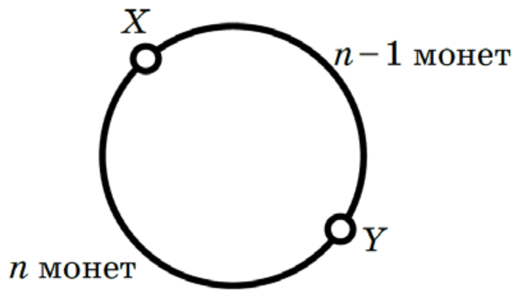
Ответ: могло.

Решение. Пример с 11 числами: 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1. Можно доказать, что больше 11 чисел не могло быть выписано. См. также более общую задачу 5 старших классов.

2. [4] По кругу лежит $2n + 1$ монета орлом вверх. Двигаясь по часовой стрелке, делают $2n + 1$ переворот: переворачивают какую-то монету, одну монету пропускают и переворачивают следующую, две монеты пропускают и переворачивают следующую, три монеты пропускают и переворачивают следующую, и т.д., наконец пропускают $2n$ монет и переворачивают следующую. Докажите, что теперь ровно одна монета лежит решкой вверх.

В. Расторгуев

Решение. Пусть $(n - 1)$-я перевёрнутая монета – X, а n-я – Y. Тогда между X и Y по часовой стрелке лежит $n - 1$ монет, а раз всего монет в круге $2n + 1$, то между Y и X по часовой стрелке лежит n монет (см. рисунок). Это значит, что $(n + 1)$-й мы снова перевернём монету X.



И далее мы будем переворачивать уже переворачивавшиеся монеты, но в обратном порядке: ведь пропустить по часовой стрелке $n + 1$ монет – всё равно, что пропустить против часовой стрелки $n - 2$ монет, ..., пропустить по часовой стрелке $2n - 2$ монет – всё равно, что пропустить против часовой стрелки 1 монету. А на последних двух шагах мы перевернём одну и ту же монету.

В итоге решкой вверх будет лежать только монета Y – она переворачивалась нечётное число раз, а все остальные монеты – чётное.

3. [4] Произведение натуральных чисел m и n делится на их сумму. Докажите, что $m + n \le n^2$.

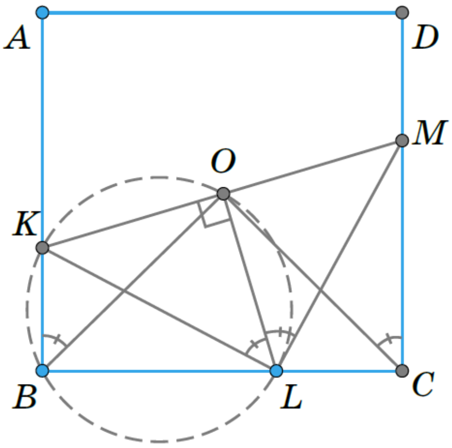
Б. Френкин

Решение 1. Поскольку $n^2 = n(m + n) - mn$, из условия следует, что n^2 делится на $m + n$. Значит, $n^2 \ge m + n$.

Решение 2. Пусть d = НОД(m, n), $m = ad$, $n = bd$. По условию, abd^2 делится на $d(a+b)$, откуда abd делится на $a+b$. Но так как числа a и b взаимно просты, каждое из них взаимно просто с $a+b$. Значит, d делится на $a+b$, откуда d^2 делится на $d(a+b) = m+n$ и, следовательно, $d^2 \ge m+n$. Осталось заметить, что $n^2 \ge d^2$.

4. [5] В прямоугольник $ABCD$ вписывают равнобедренные треугольники с заданным углом α при вершине, противолежащей основанию, так, что эта вершина лежит на отрезке BC, а концы основания – на отрезках AB и CD. Докажите, что середины оснований у всех таких треугольников совпадают.

И. Жижилкин



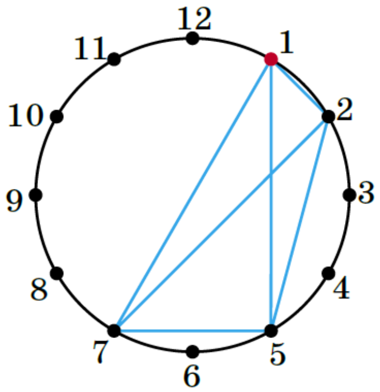
Решение. Пусть KLM – один из таких треугольников, O – середина его основания KM (см. рисунок).

Тогда LO – медиана, а значит, и биссектриса, и высота треугольника KLM. Поскольку углы KBL и LOK прямые, точки B и O лежат на окружности с диаметром KL, откуда $\angle KBO = \angle KLO = \alpha/2$. Аналогично получаем, что $\angle MCO = \angle MLO = \alpha/2$.

Тогда O – точка пересечения прямых, проведённых из вершин B и C под углом $\alpha/2$ к сторонам прямоугольника BA и CD соответственно, то есть она не зависит от положения треугольника KLM.

5. [5] Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 12 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

К. Кноп



Решение. Мысленно расположим шкатулки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 12 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулками в дугах. Между любыми двумя шкатулками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать ≪шаблон≫ – четырёхугольник с вершинами в шкатулках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображён на рисунке справа (четырёхугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным.

Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он ≪накрыл≫ обе шкатулки с монетами. Помощник так и делает, а открывает шкатулку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулкой, открытой помощником, и находит монеты.

Это же решение можно изложить другими словами. Занумеруем шкатулки остатками по модулю 12. Если помощник открывает шкатулку с номером k, то фокусник открывает шкатулки с номерами $k + 1$, $k + 2$, $k + 5$ и $k + 7$ по модулю 12. Поскольку любая пара шкатулок имеет вид $\{n, n + 1\}$, $\{n, n + 2\}$, $\{n, n + 3\}$, $\{n, n + 4\}$, $\{n, n + 5\}$ или $\{n, n + 6\}$, то помощник всегда найдёт четвёрку шкатулок нужного вида, содержащую пару шкатулок с монетами.

Существуют и другие шаблоны – например, четырёхугольник с вершинами 1, 2, 4, 8.

См. также задачу 4 старших классов, где шкатулок 13.