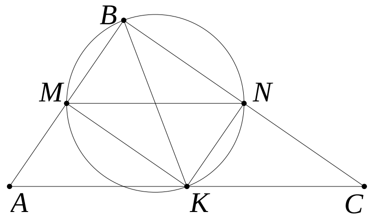
40-й Международный математический Турнир городов
Решения задач осеннего тура
Младшие классы.
Базовый вариант

1. [4] *Окружность, проходящая через вершину B прямого угла и середину гипотенузы прямоугольного треугольника ABC, пересекает катеты этого треугольника в точках M и N. Оказалось, что AC = 2MN. Докажите, что M и N – середины катетов треугольника ABC.*

(М. Евдокимов)



Пусть точка M лежит на AB, точка N – на BC, и пусть точка K – середина AC. Тогда $BK = {}^1/_2\ AC$ (в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы). Так как угол B прямой, то MN – диаметр данной окружности. Поскольку $BK = {}^1/_2\ AC = MN$, то BK – тоже диаметр. Следовательно, $KM \perp AB$, то есть KM – средняя линия треугольника ABC. Аналогично KN – средняя линия.

2. [4] *Найдите все натуральные* n*, удовлетворяющие условию: числа 1, 2, 3, …, 2*n *можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, получится квадрат натурального числа.*

(Фольклор)

Ответ: все $n > 1$. **Решение**. $1 + 2$ – не квадрат. Пусть $n > 1$.

1-й способ. Разобьём эти числа на четвёрки подряд идущих, и, если надо, шестёрку первых чисел. Из четвёрок образуем $(a + (a + 3))((a + 1) + (a + 2)) = (2a + 3)^2$, из шестёрки – $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6)=18^2$.

2-й способ. Если n чётно, то $(1 + 2n)(2 + (2n - 1))\ldots(n + (n + 1)) = (2n + 1)^n$ – квадрат. Если n нечётно, то $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6)(7 + 2n)(8 + (2n - 1))\ldots((n + 3) + (n + 4)) = 18^2(2n + 7)^{n-3}$ – квадрат.

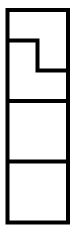
Замечание. Для $n = 2, 3$ разбиение единственно, в остальных случаях – нет.

3. *Клетчатый прямоугольник размера 7×14 разрезали по линиям сетки на квадраты 2×2 и уголки из трёх клеток. Могло ли квадратов получиться*

а*) [1] столько же, сколько уголков;*

б*) [3] больше, чем уголков?*

(М. Евдокимов)



а) **Ответ:** могло. Будем считать, что в прямоугольнике 7 строк и 14 столбцов. Разобьём прямоугольник на полоски из двух столбцов, а каждую из полосок – как на рисунке справа.

б) **Ответ:** не могло. Докажем, что требуется хотя бы 14 уголков. Тогда квадратов будет не больше $(7\cdot 14 - 3\cdot 14) : 4 = 14$.

Первый способ. Выставляя фигурки, будем следить за чётностью количества покрытых клеток в каждом столбце. Квадраты не меняют эту чётность, а уголок меняет чётность только одного столбца. Сначала все столбцы были чётными, а должны стать нечётными. Следовательно, потребуется хотя бы 14 уголков.

Второй способ. Раскрасим прямоугольник «в полоску»: все нечётные горизонтали – чёрные, а чётные – белые. При этом чёрных клеток будет на 14 больше, чем белых. Но в квадрате число чёрных клеток равно числу белых, а в уголке их количества отличаются на единицу. Следовательно, потребуется не меньше 14 уголков.

4. [5] *У Насти есть пять одинаковых с виду монет, среди которых три настоящие – весят одинаково – и две фальшивые: одна тяжелее настоящей, а вторая на столько же легче настоящей. Эксперт по просьбе Насти сделает на двухчашечных весах без гирь три взвешивания, которые она укажет, после чего сообщит Насте результаты. Может ли Настя выбрать взвешивания так, чтобы по их результатам гарантированно определить обе фальшивые монеты и указать, какая из них более тяжёлая, а какая более лёгкая?*

(Р. Женодаров)

Ответ. Может. **Первый способ**. Обозначим монеты буквами a, b, c, d, e. Настя попросит провести взвешивания: $a?b$, $c?d$, $ab?cd$. С точностью до симметрии возможны четыре исхода.

1) $a > b$, $c > d$, $ab > cd$. Тогда a – тяжёлая, d – лёгкая.
2) $a = b$, $c > d$, $ab = cd$. Тогда c – тяжёлая, d – лёгкая.
3) $a = b$, $c > d$, $ab > cd$. Тогда e – тяжёлая, d – лёгкая.
4) $a = b$, $c > d$, $ab < cd$. Тогда c – тяжёлая, e – лёгкая.

Второй способ. Настя отдаст эксперту четыре монеты и попросит взвесить все три разбиения их на пары. Пусть каждая из этих монет получит метку – сколько раз она была на перевесившей чаше. Для каждого вида оставшейся монеты запишем набор меток: настоящая – 2110, лёгкая – 3111, тяжёлая – 2220. Видно, что все эти случаи различаются, и в каждом из них определяется вид обеих фальшивых монет.

Замечание. Можно доказать, что других способов у Насти нет.

5. [5] *Назовём девятизначное число* <u>*красивым*</u>*, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 1000 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.*

(М. Евдокимов)

Всякое девятизначное число M равно сумме $10^6A + 10^3B + C = 999\cdot(1001A + B) + (A + B + C)$, где A, B, C – числа, образованные тремя первыми, тремя следующими и тремя последними цифрами числа M. Разобьём цифры от 1 до 9 на три тройки с суммой 15 в каждой. Если мы на первые места в числах A, B, C поставим три цифры из одной тройки, на вторые – из другой, на третьи – из оставшейся, сумма $A + B + C$ будет равна $15\cdot111 = 45\cdot37$. Так как и 999 делится на 37, то красивое число M при такой расстановке цифр будет кратно 37. Поскольку три цифры по трём местам можно расставить шестью способами и назначить три тройки на первое, второе и третье места тоже можно шестью способами, всего у нас получается $6\cdot6\cdot6\cdot6 = 1296$ красивых чисел, кратных 37. Теперь достаточно указать три тройки цифр с равными суммами. Например, это $\{1, 5, 9\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{3, 4, 8\}$.

ДОПОЛНЕНИЕ. В варианте старших классов надо было доказать, что красивых чисел не менее 2018. Приведём несколько решений этой задачи. Будем записывать красивое число $\overline{a_8\ldots a_0}$ в виде таблицы (см. рис.). Так как $10^6 - 1 = 999999$ делится на 999, то

a_8	a_7	a_6
a_5	a_4	a_3
a_2	a_1	a_0

$$\overline{a_8\ldots a_0} = 10^8a_8 + \ldots + a_0 \equiv 100(a_8 + a_5 + a_2) + 10(a_7 + a_4 + a_1) + (a_6 + a_3 + a_0) \pmod{999}.$$

Поэтому из красивого числа, кратного d, где d – делитель числа 999, перестановками внутри столбцов можно получить $6^3 = 216$ красивых чисел, кратных d (если первый столбец содержит нуль, то на 72 числа меньше).

1-е решение. Рассмотрим таблицу справа. Суммы в её столбцах одинаковые. Поэтому соответствующее красивое число кратно 111. Переставляя столбцы местами, получим $6\cdot216$ красивых чисел, кратных 111. Так как по строкам суммы тоже одинаковые, то, отразив эту табличку относительно диагонали, получим ещё столько же чисел, а всего – 2592 красивых числа, кратных 111, а значит, кратных и 37.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Замечание. Приведённая таблица называется *магическим квадратом*. Помимо содержащихся в нём двух способов скомпоновать из различных цифр три равные суммы по три слагаемых есть ещё ровно 6 способов сделать это. И все они получаются из магического квадрата! Покажем это. Уменьшим в нём цифры 1, 2, 3 на единицу. Получим два способа, дающих по $1296 - 2\cdot72 = 1152$ числа. После этого уменьшим цифры 4, 5, 6. Получим ещё два способа. Наконец, уменьшим 7, 8, 9, получая ещё два способа. Всего таким методом получается 9504 красивых числа, кратных 111.

Для двух следующих решений нам понадобится следующая

Лемма. Пусть d – делитель числа 999. Если $100x + 10y + z$ кратно d, то и числа $100y + 10z + x$ и $100z + 10x + y$ кратны d.

Доказательство. $100y + 10z + x = 10(100x + 10y + z) - 999x$.

2-е решение. Поищем красивые числа, кратные 999. Заметим, что $100\cdot8 + 10\cdot18 + 19 = 999$. Легко найти пять разбиений ненулевых цифр на столбцы с суммами 19, 18, 8 справа налево (левый столбец не указываем, он получается автоматически): 982, 765; 973, 864; 964, 873; 874, 963; 865, 972. Учитывая циклические сдвиги столбцов, всего получим $5\cdot3\cdot216 = 3240$ красивых чисел, кратных 999.

Замечание. Другие красивые числа, кратные 999, можно получить, дополняя все цифры до 9. При этом $5\cdot 72$ чисел будут начинаться с нуля, их надо отбросить. Всего получится 6120 красивых чисел, кратных 999. Нетрудно показать, что других красивых чисел, кратных 999, нет!

Третий способ (навеяно идеей Алиева Рашида, 10 кл., г. Махачкала). Рассмотрим таблицу справа. Числа, читаемые в строках, делятся на 37, поскольку отличаются на 111. Поэтому соответствующее таблице девятизначное число кратно 37. Осуществляя циклические сдвиги внутри строк, получим 27 таблиц, каждая из которых даёт по 216 красивых чисел, кратных 37 (см. лемму). Для девяти из этих таблиц надо вычесть по 72 числа. Всего получается $24\cdot 216 = 5184$ красивых числа, кратных 37.

0	3	7
1	4	8
2	5	9

Замечания. **1**. Ещё столько же красивых чисел получится из таблицы справа. Из указанных шести трёхзначных чисел можно составить ещё две такие таблицы. Следовательно, этот метод даёт 20736 красивых чисел, кратных 37.

0	7	4
1	8	5
2	9	6

2. Всего существует 89712 красивых чисел, кратных 37, из них 34416 чисел кратны 111.