СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 24 марта 2019 года.

Решения задач.

У-1. *В таблице $n \times n$ стоят все целые числа от 1 до n^2, по одному в клетке. В каждой строке числа возрастают слева направо, в каждом столбце — снизу вверх. Докажите, что наименьшая возможная сумма чисел на главной диагонали, идущей сверху слева вниз направо, равна $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.* *(Б. Френкин)*

Решение. Будем называть *лесенкой* следующую часть таблицы из $n + (n-1) + \ldots + 1$ клеток: самый левый столбец, следующий столбец без верхнего числа, следующий столбец без двух верхних чисел, ..., самый правый столбец без верхних $n-1$ чисел.

Пример. Двигаясь от самого левого столбца лесенки к самому правому, заполняем их снизу вверх числами 1, 2, ... по возрастанию: в первом столбце лесенки будут стоять числа от 1 до n, во втором — от $n+1$ до $2n-1$ и т.д. Заполнив лесенку, заполняем оставшиеся клетки таблицы по тому же принципу: двигаясь от самого левого столбца таблицы к самому правому, заполняем их снизу вверх оставшимися числами по возрастанию. Тогда таблица будет удовлетворять условию, а сумма чисел на главной диагонали будет равна $n + [n + (n-1)] + [n + (n-1) + (n-2)] + \ldots + [n + \ldots + 1] = n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2$, что и требуется.

Оценка. **Первый способ.** Пусть $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ — числа на главной диагонали (порядок, в котором они там стоят, нам неизвестен). Для каждого a_k покрасим само a_k и все числа, стоящие либо под a_k в том же столбце, либо слева от a_k в той же строке, в цвет номер k. Тогда чисел каждого цвета будет ровно n, и каждое число лесенки, кроме чисел главной диагонали, будет покрашено ровно в два цвета — «цвет строки» и «цвет столбца» (а каждое число на главной диагонали — только в один свой цвет).

Заметим, что a_k больше всех остальных чисел цвета k и больше всех чисел, цвет которых имеет номер меньше k (так как $a_k > a_{k-1} > \ldots > a_1$). Тем самым a_k не меньше, чем количество чисел с цветами от 1 до k. Но таких чисел ровно $n + (n-1) + \ldots + (n-(k-1))$, поскольку чисел цвета 1 — ровно n, чисел цвета 2, но не цвета 1, — ровно $n-1$, ..., чисел цвета k, но ни одного из цветов $1, 2, \ldots, k-1$, — ровно $n-(k-1)$.

Отсюда $a_1 + \ldots + a_n \geqslant n + [n + (n-1)] + \ldots + [n + (n-1) + \ldots + 2 + 1] = n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1^2$.

Второй способ. Пусть $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ — числа на главной диагонали. Рассмотрим некоторое a_k. Если число из лесенки находится в одной строке или в одном столбце с одним из диагональных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то оно не превосходит его, и значит, не превосходит a_k, числа $x > a_k$ могут находиться только в строках и столбцах с числами $a_{k+1}, \ldots, a_n$ — таких чисел всего $1 + 2 + \ldots + (n-k)$. Все остальные $(n+k+1) + \ldots + n$ чисел лесенки не больше a_k, то есть $a_k \geq (n+k+1) + \ldots + n$. Складывая, получаем точную оценку на $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Третий способ. Пронумеруем все диагонали, параллельные главной и лежащие не выше её, числами от 1 до n снизу вверх. Пусть $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ — числа на главной диагонали. Проведём из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ единичные стрелки влево или вниз в попарно различные клетки $(n-1)$-й диагонали (это, очевидно, возможно). Из a_n же проведём одну из двух стрелок на $(n-1)$-ю диагональ.

Далее действуем аналогично. Именно, пусть мы уже провели стрелки в клетки k-й диагонали так, что пути по стрелкам из $a_1, \ldots, a_k$ не имеют общих клеток. Берём клетки k-й диагонали, в которые приходят пути из $a_1, \ldots, a_{k-1}$, и проводим из них стрелки в попарно различные клетки $(k-1)$-й диагонали. Из оставшейся клетки проводим любую стрелку на $(k-1)$-ю диагональ.

Теперь нетрудно доказать оценку. Из клеток $a_1, \ldots, a_k$ ведут k путей, причём их начала длины $n, n-1, \ldots, n-k+1$ соответственно не имеют общих клеток. Число a_k не меньше всех чисел, встречающихся на этих путях; поэтому $a_k \geq n + (n-1) + \ldots + (n-k+1)$. Суммируя, получаем

$$a_1 + \ldots + a_n \geq n + (n + (n-1)) + \ldots + (n + (n-1) + \ldots + 1) = n \cdot n + (n-1) \cdot (n-1) + \ldots + 1 \cdot 1.$$

Замечание. Это же решение можно оформить по-другому. Рассмотрим только расстановку различных натуральных чисел в диагоналях $1, 2, \ldots, n$. Докажем, что если в каждой диагонали поставить числа сверху вниз по возрастанию, то расстановка чисел **в этом треугольнике** по-прежнему будет удовлетворять условиям. Для этого, если $b_1 < \cdots < b_k$ и $c_1 < \cdots < c_{k-1}$ — числа в k-й и $(k-1)$-й диагоналях, надо доказать, что $b_i \geq c_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Это доказывается, например, тем же проведением стрелок; есть и другие способы.

После этого в новой расстановке число a_k не меньше, чем все числа в первых k столбцах треугольника, то есть $a_k \geq n + (n-1) + \ldots + (n-k+1)$, откуда и следует оценка.

У-2. *Луноход ездит по поверхности планеты, имеющей форму шара с длиной экватора 400 км. Планета считается полностью исследованной, если луноход побывал на расстоянии по поверхности не более 50 км от каждой точки поверхности и вернулся на базу (в исходную точку). Может ли луноход полностью исследовать планету, преодолев не более 600 км?* *(М. Евдокимов)*

Ответ. Может.

Решение. Отметим на планете полюсы N и S, и пусть точки A, B, C и D делят соответствующий экватор на четыре равных дуги, как на рисунке 1.

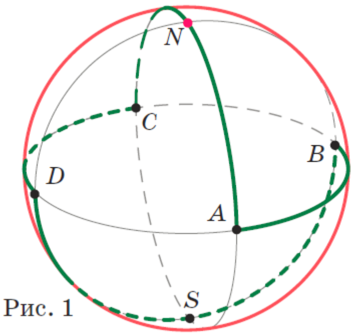

Рис. 1

Рассмотрим замкнутый путь $A \to B \to S \to D \to C \to N \to A$ по поверхности, состоящий из дуг больших окружностей с центрами в центре планеты. Этот путь состоит из 6 одинаковых дуг длиной в $1/4$ экватора, поэтому длина пути составляет 600 км.

Покажем, что луноход побывал на расстоянии не более 50 км от каждой точки. Поверхность планеты разобьём на 8 одинаковых сферических треугольников с вершинами в отмеченных точках. Луноход побывал во всех вершинах и во всех точках хотя бы одной стороны каждого треугольника. Так как расстояние по поверхности от полюса до экватора 100 км, то поверхность планеты разбивается на экваториальный пояс — точки, удалённые от экватора на расстояние не более 50 км, — и две полярные шапки — точки, удалённые от полюсов на расстояние не более 50 км. На рисунке 2 зелёная часть треугольника исследована луноходом, так как он проехал вдоль стороны, а красная исследована, так как он побывал в вершине.

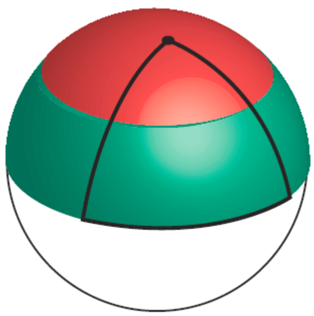
Рис. 2

Замечание. Докажем более сильное утверждение: луноход может полностью исследовать планету, преодолев не более 570 км.

Снова разобьём поверхность планеты на 8 равных треугольников. Средней параллелью треугольника назовём часть линии, параллельной стороне треугольника и соединяющей середины двух других сторон. На рисунке 2 средняя параллель треугольника лежит на границе красной и зелёной областей. Пусть луноход прошёл по средним параллелям всех треугольников, как на рисунке 3. Вся поверхность планеты будет исследована, потому что любая точка треугольника находится на расстоянии не более 50 км от некоторой точки средней параллели, что видно из рисунка 2.

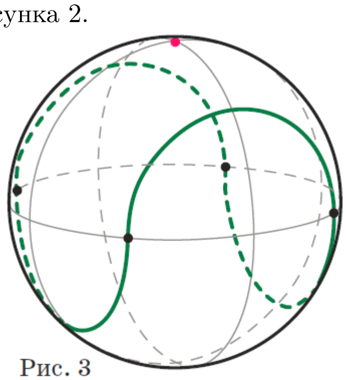
Рис. 3

Наконец, докажем, что длина окружности, на которой лежит средняя параллель, в $\sqrt{2}$ раз меньше длины экватора. Из этого будет следовать, что длина пути равна $\frac{800}{\sqrt{2}}$, что примерно равно 566.

Пусть N и E — вершины треугольника, O — центр планеты. Радиус окружности, на которой лежит средняя параллель, равен расстоянию r от середины M дуги NE до прямой ON. Из рисунка 4 видно, что $r = \frac{OE}{\sqrt{2}}$. Значит, радиус меньшей окружности в $\sqrt{2}$ меньше радиуса планеты, что и требовалось.

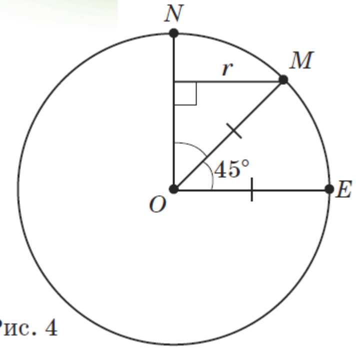

Рис. 4

Интересно было бы узнать, какова наименьшая возможная длина такого пути. Можно доказать (правда, не совсем элементарно), что она заведомо больше 500.

У-3. *Можно ли замостить плоскость параболами, среди которых нет равных? (Требуется, чтобы каждая точка плоскости принадлежала ровно одной параболе и чтобы ни одна парабола не переводилась ни в какую другую параболу движением.)* *(А. Лопатников)*

Ответ. Да.

Решение. Введём на плоскости декартовы координаты $(x; y)$ и рассмотрим всевозможные параболы с уравнениями вида $y = ax^2 + \ln a$, где a — произвольное положительное число. Среди этих парабол нет одинаковых, так как коэффициенты при x^2 различны. (Если совместить вершины двух парабол, а также их оси с учётом направления, то парабола, у которой a больше, пойдёт между «рогами» другой.)

Зафиксируем произвольное x, и пусть a пробегает положительную полуось. Тогда $y = ax^2 + \ln a$ является непрерывной функцией от a. Поскольку $x^2 \geq 0$, величина ax^2 не убывает с ростом a. Функция $\ln a$ строго возрастает. Поэтому y строго возрастает по a как сумма неубывающей и строго возрастающей функций. При $a \to +\infty$ имеем $y \to +\infty$, а при $a \to 0$ имеем $y \to -\infty$. Значит, каждое значение y при данном x появится ровно один раз. Поэтому любая точка плоскости принадлежит ровно одной параболе.

Комментарий. Вместо $\ln a$ можно взять любую непрерывную строго возрастающую функцию от a, которая отображает положительную полуось на всю вещественную ось.

У-4. *Про натуральные числа x, y и z известно, что* НОД$(x, y, z) = 1$ *и* $x^2+y^2+z^2 = 2(xy+yz+zx)$. *Докажите, что x, y и z — квадраты натуральных чисел.* *(Ю. Маркелов)*

Решение 1. Заметим, что любые два из чисел x, y, z взаимно просты. Действительно, пусть, например, x и y имеют общий простой делитель p. Тогда $z^2 = 2(xy + yz + xz) - x^2 - y^2$ также делится на p, а потому на p делится и z. Значит, НОД(x, y, z) делится на p, но это противоречит условию.

Теперь заметим, что

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx) - 4xy = (x + y - z)^2 - 4xy.$$

Таким образом, $4xy$ является полным квадратом. Так как 4 — полный квадрат, то и xy — полный квадрат. А так как x и y взаимно просты, то каждое из них — полный квадрат. Аналогично и z — полный квадрат.

Решение 2. Пусть p — простое число. Заметим, что если два из чисел x, y, z делятся на p, то из равенства в условии третье число тоже делится на p, что противоречит взаимной простоте x, y, z.

Докажем, что любой простой делитель p числа x входит в каноническое разложение x в чётной степени. Заметим, что $y^2 + z^2 - 2yz = 2xy + 2xz - x^2$, то есть

$$(y - z)^2 = x(2(y + z) - x).$$

Так как x делится на p, то и $y - z$ тоже. Если при этом $2(y + z)$ не делится на p, то степень вхождения p в разложение x такая же, как и у $(y - z)^2$, то есть чётная, и всё доказано.

Пусть $2(y + z)$ делится на p. Поскольку и $2(y - z)$ делится на p, получаем, что $4y$ и $4z$ делятся на p. Если $p \neq 2$, сразу имеем противоречие с взаимной простой x, y, z.

Разберём случай $p = 2$. Пусть $x = 2t$, тогда $y = 2k + 1$, $z = 2l + 1$ и $4(k - l)^2 = 2t(4(k + l + 1) - 2t)$, откуда

$$(k - l)^2 = t(2(k + l + 1) - t).$$

Если $k - l$ нечётно, то t — нечётно, и, по доказанному выше, t — квадрат нечётного числа. Тогда и $2(k+l+1) - t$ — квадрат нечётного числа, но при этом имеет остаток 3 от деления на 4 (поскольку $2(k + l + 1)$ делится на 4, а t имеет остаток 1 от деления на 4), что невозможно.

Пусть $k - l$ чётно. Пусть 2 входит в разложение t в степени α. Если $\alpha = 1$, то 2 входит в разложение x во второй (то есть, чётной) степени, что и требовалось. Если $\alpha > 1$, то поскольку $k + l + 1$ нечётно, 2 входит в разложение числа $2(k + l + 1) - t$ в первой степени, а значит, 2 входит в разложение $(k - l)^2$ в степени $\alpha + 1$, то есть $\alpha + 1$ чётно. Но это и есть степень вхождения 2 в x.

У-5. *Перед Шариком лежит бесконечное число котлет, на каждой сидит по мухе. На каждом ходу Шарик последовательно делает две операции:*
1) съедает какую-то котлету вместе со всеми сидящими на ней мухами;
2) пересаживает одну муху с одной котлеты на другую (на котлете может быть сколько угодно мух).
Шарик хочет съесть не более миллиона мух. Докажите, что он не может действовать так, чтобы каждая котлета была съедена на каком-то ходу. *(И. Митрфанов)*

Решение 1. Предположим противное. Заметим, что тогда с какого-то момента Шарик будет есть только котлеты без мух. С этого момента число котлет без мух не может увеличиться после хода Шарика: если он и образовал какую-то новую котлету без мух (переложив с неё муху), то перед этим съел какую-то котлету без мухи. Тогда с какого-то дальнейшего момента число котлет без мух стабилизируется. Далее Шарик каждым ходом съедает котлету без мухи и перекладывает муху с котлеты, на которой ровно одна муха, на котлету, где уже есть мухи. Тем самым появится котлета, на которой хотя бы две мухи, и эту котлету Шарик уже никогда не съест (с таких котлет он мух уже не снимает, а котлеты с мухами уже не ест).

Решение 2. Предположим противное. Пронумеруем котлеты в том порядке, в каком Шарик будет их есть. За первый миллион шагов Шарик переложит некоторых мух на какие-то котлеты. Пусть n — наибольший среди номеров этих котлет. Рассмотрим первые n котлет. За первый миллион шагов суммарное количество мух на них не уменьшалось (не считая мух, которые Шарик съел). Значит, перед тем, как съесть последнюю из n котлет, Шарик успеет переложить на котлеты с большими номерами максимум $n-1-1\,000\,000$ мух, и потому за первые n шагов он съест хотя бы $1\,000\,001$ муху.

Решение 3. Пусть Шарик съел не более $1\,000\,000$ мух, съев все котлеты. Тогда каждую не съеденную муху он перемещал бесконечное число раз, иначе он не съел котлету, на которой она остановилась. Рассмотрим момент, когда он переместил какую-то муху M в $1\,000\,002$-й раз. Пусть до этого он съел N котлет (и переместил максимум $N-1$ мух). Хотя бы с $N-1\,000\,000$ из них он переместил муху, которая там была изначально, и лишь одна из них могла быть M. Значит, до этого он перемещал мух хотя бы $(N-1\,000\,000))+1\,000\,000=N$ раз, что невозможно

У-6. *Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J. Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к описанной окружности треугольника AKL в точке A пересекает прямую BC в точке P. Докажите, что $PA=PJ$.* *(П. Кожевников, А. Кузнецов)*

Решение. Пусть AM, AN — внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника, а T — точка пересечения AM и KL. Тогда KL проходит через N. Кроме того, непосредственный счет углов показывает, что прямые AP и KL образуют равные углы с AM. (Например, при $AB<AC$ имеем $\angle MAP=\angle MAB+\angle BAP=\angle CAM+\angle LKA=\angle LTA$.) Поэтому надо доказать, что прямая, проходящая через J и параллельная KL, пересекает BC в той же точке, что и прямая, проходящая через середину U отрезка AJ и параллельная AN, то есть, что $MJ/JT=MU/UA$. А это равенство следует из того, что четверка A,J,T,M гармоническая (то есть $MJ/MA=TJ/TA$).