40-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура
Сложный вариант
Старшие классы

1. [5] На экране компьютера напечатано некоторое натуральное число, делящееся на 7, и отмечен курсором промежуток между какими-то двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что если её впечатать в отмеченный промежуток любое число раз, получится число, делящееся на 7.

А. Галочкин

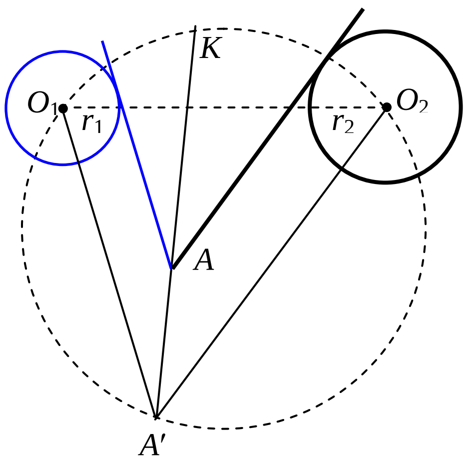
Решение. Пусть исходное число имеет вид $\overline{AB}$, причём A при делении на 7 даёт остаток r. Возьмём такую цифру a, что $2r + a$ делится на 7 (она, очевидно, найдётся). Будем делить число вида $\overline{Aa...aB}$ на 7 в столбик. Когда мы закончим делить A, останется остаток r. На следующем шаге мы будем делить на 7 число $10r + a = 7r + (2r + a) + r$, снова получается остаток r. На следующих шагах это повторяется, пока мы не дойдём до деления на 7 числа $\overline{rB}$, которое делится на 7 по условию.

2. [6] См. задачу 2 младших классов.

3. [7] К плоскости приклеены два непересекающихся не обязательно одинаковых деревянных круга – серый и чёрный. Дан бесконечный деревянный угол, одна сторона которого серая, а другая – чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи угла, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная – чёрного (касание происходит не в вершине). Докажите, что внутри угла можно нарисовать луч, выходящий из вершины, так, чтобы при всевозможных положениях угла этот луч проходил через одну и ту же точку плоскости.

Е. Бакаев, И. Богданов, П. Кожевников, В. Расторгуев

Решение. Искомый луч – геометрическое место лежащих внутри угла точек, для которых отношение расстояний до серой и чёрной сторон равно отношению $\frac{r_1}{r_2}$ радиусов серой и чёрной окружностей. Дальнейшие рассуждения практически повторяют решение задачи 3 младших классов. Ясно, что луч $A'A$ содержит указанный выше луч и обладает тем же свойством по отношению к прямым $A'O_1$ и $A'O_2$. Поэтому этот луч пересекает дугу O_1O_2 в такой точке K, что $O_1K : O_2K = (2R\sin\angle O_1A'K) : (2R\sin\angle O_2A'K) = \sin\angle O_1A'K :$ $: \sin\angle O_2A'K = (A'A\sin\angle O_1A'K) : (A'A\sin\angle O_2A'K) = r_1 : r_2$.



4. [8] См. задачу 5 младших классов.

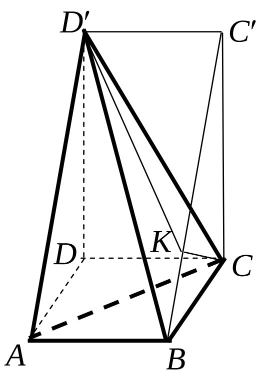
5. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1. **а**) [4] Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1? **б**) [4] А квадрат площади $^1/_{2019}$?

М. Евдокимов

Ответ: а) не может; **б**) может. **Решение.** Пусть единичный квадрат $ABCD$ – проекция тетраэдра $ABCD'$ на плоскость грани ABC. Тогда этот тетраэдр «вписан» в прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$.

Из симметрии относительно плоскости DBD' ясно, что проекция тетраэдра на плоскость грани ACD' трапецией быть не может (если две противоположные стороны проекции параллельны, то и две другие тоже), а проекции тетраэдра на плоскости граней ABD' и BCD' равны.

Высота CK тетраэдра, очевидно, совпадает с высотой прямоугольного треугольника BCC', поэтому проекция на плоскость ABD' – трапеция $ABKD'$.



Так как треугольники BCC' и BKC подобны и $BC = 1$, имеем $BK = \dfrac{1}{BC'} = \dfrac{1}{AD'}$. Тогда $S_{ABKD'} =$

$= \dfrac{AD' + BK}{2} = \dfrac{AD' + \dfrac{1}{AD'}}{2} \geq 1$. Равенство возможно лишь при $AD' = \dfrac{1}{AD'} = 1$, но это не так, поскольку гипотенуза AD' больше катета AD, равного 1. Итак, ответ в пункте **а**) отрицателен.

Ответ в пункте **б**) положителен: достаточно выбрать DD' так, что $AD' + \dfrac{1}{AD'} = 2\cdot 2019$, а потом уменьшить длины всех рёбер тетраэдра в $\sqrt{2019}$ раз.

6. [8] Петя и Вася играют в игру. Для каждых пяти различных переменных из набора $x_1, \ldots, x_{10}$ имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. По правилам игры, когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?

И. Богданов

Ответ: да. **Решение**. Покажем, как может действовать Вася, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети.

Допустим, Петя не взял карточку, на которой написано $x_6x_7x_8x_9x_{10}$. Тогда Вася может взять эту карточку, а дальше брать любые карточки. При $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 1$ сумма произведений у Пети будет равна 0, а у Васи будет равна 1.

Если Петя сразу же взял карточку, на которой написано $x_6x_7x_8x_9x_{10}$, то Вася может взять карточку, на которой написано $x_5x_7x_8x_9x_{10}$, а следующим ходом одну из карточек $x_4x_7x_8x_9x_{10}$ или $x_5x_6x_8x_9x_{10}$ (хотя бы одна из них останется, поскольку за ход Петя может взять только одну из этих двух карточек). Далее Вася может брать карточки как угодно.

В случае, если Вася взял карточку $x_4x_7x_8x_9x_{10}$, он может присвоить переменным такие значения: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$, $x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 100$.

Тогда только на двадцати одной карточке окажется ненулевое произведение, причём для трёх карточек $x_4x_7x_8x_9x_{10}$, $x_5x_7x_8x_9x_{10}$ и $x_6x_7x_8x_9x_{10}$ это произведение будет равно 100 000 000, а для остальных не будет превосходить 1 000 000. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 200 000 000, а у Пети не больше 118 000 000.

В случае, если Вася взял карточку $x_5x_6x_8x_9x_{10}$, он может присвоить переменным такие значения: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = x_6 = x_7 = 1$, $x_8 = x_9 = x_{10} = 10$.

Тогда только на шести карточках окажется ненулевое произведение, причём для трёх карточек $x_5x_6x_8x_9x_{10}$, $x_5x_7x_8x_9x_{10}$ и $x_6x_7x_8x_9x_{10}$ это произведение будет равно 1000, а для остальных трёх будет равно 100. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 2000, а у Пети не больше 1300.

7. [12] Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке (0, 0) и вершинами в целых точках, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* – фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

И. Чанакчи, Р. Шиффлер

Решение. Разным ломаным соответствуют разные червяки: если две ломаные совпадают до точки A, а в ней расходятся, то соответствующие червяки содержат разные клетки (рис. 1): синюю, если из A сделан ход вправо, красную – если вверх, ни одной из них, если ломаная в A окончилась.

Будем покрывать червяка доминошками с конца. Две последние клетки червяка можно покрыть двумя способами.

Операция A: положим доминошку перпендикулярно последнему звену ломаной (рис. 2); пусть есть a способов покрыть оставшуюся часть червяка.

Операция B: положим две доминошки параллельно последнему звену ломаной (рис. 3); пусть есть b способов покрыть оставшуюся часть червяка.

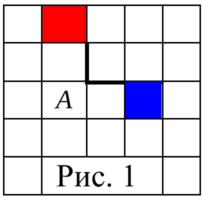


Рис. 1

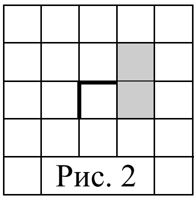


Рис. 2

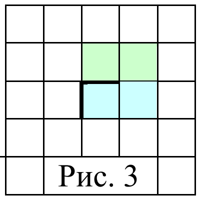


Рис. 3

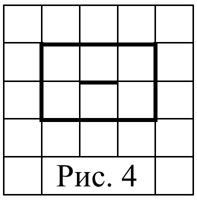


Рис. 4

Будем говорить, что червяк (и соответствующая ломаная) имеет *тип* (a, b). Например, простейший червяк, соответствующий ломаной из одного звена, имеет тип (2, 1) (рис. 4). Число способов разбить червяк типа (a, b) на доминошки равно $a + b$. Ясно, что $a > b$.

Лемма 1. Если ломаную типа (a, b) продолжить звеном, параллельным её последнему звену, то получится ломаная типа $(a + b, a)$.

Доказательство. Если к новому червяку применить операцию A, то останется червяк, соответствующий исходной ломаной (рис 5). А его можно покрыть $a + b$ способами. Если же применить операцию B, то останется то же самое, что при применении операции A к исходному червяку (рис. 6).

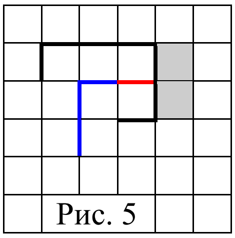


Рис. 5

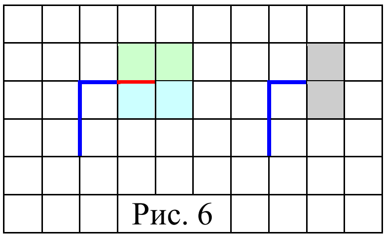


Рис. 6

Лемма 2. Если ломаную типа (a, b) продолжить звеном, перпендикулярным её последнему звену, то получится ломаная типа $(a + b, b)$.

Доказательство. Если к новому червяку применить операцию A, то, как и в лемме 1, останется червяк, соответствующий исходной ломаной (рис 7). Если же применить операцию B, то следующую доминошку можно положить единственным способом, после чего останется то же самое, что при применении операции B к исходному червяку (рис 8).

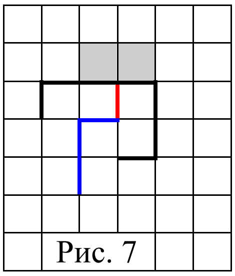


Рис. 7

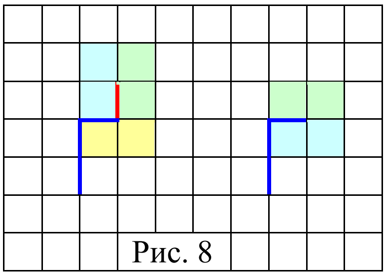


Рис. 8

Лемма 3. Если червяк имеет тип (a, b), то a и b взаимно просты.

Доказательство. Все червяки получаются из простейшего типа (2, 1) добавлением звеньев, а при переходах, описанных в леммах 1 и 2, взаимная простота не нарушается.

Поскольку НОД$(n, a) = 1 \iff$ НОД$(n, n - a) = 1$, то для решения задачи осталось доказать, что для каждого натурального $n \geq 3$ и взаимно простого с n числа a, такого что $^n/_2 < a < n$, существует ровно два червяка типа $(a, n - a)$.

Достаточно рассмотреть червяков, у которых первое звено горизонтально (их вдвое меньше). Проведём индукцию по n. *База* $(n = 3)$ очевидна.

Шаг индукции. Пусть $n > 3$, $n - a = b$, $a - b = c$. Если $b > c$, то ломаную типа (a, b) можно получить только добавлением звена к ломаной типа (b, c) способом, описанным в лемме 1, а такая ломаная единственна по предположению индукции.

Если же $b < c$, то ломаную типа (a, b) можно получить только добавлением звена к ломаной типа (c, b) способом, описанным в лемме 2, а такая ломаная также единственна по предположению индукции.