40-й Международный математический Турнир городов

Решения задач осеннего тура

Старшие классы

Сложный вариант

1. [5] *На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?*

(М. Кузнецов)

Ответ. 1009 подпевал. **Решение**. Назовём рыцарей и лжецов *приницuпиальными* людьми.

Оценка. **Первый способ**. (*Бучаев Абдулкадыр*) Будем следить за *балансом* – разностью количеств ответов «Да» и «Нет». В начале и в конце баланс нулевой, с каждым ответом он изменяется на 1. Нулевые значения баланса разбивают ряд жителей на группы. Внутри каждой группы баланс сохраняет знак. Подпевалы всегда увеличивают модуль баланса. Поэтому, чтобы сделать баланс нулевым, принципиальных жителей должно быть не меньше чем подпевал. Это справедливо для каждой группы, а значит, и для всех жителей острова.

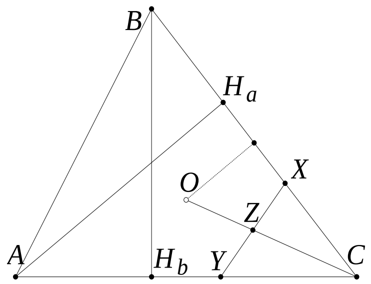
Второй способ. Подпевала не мог увеличивать минимум из текущих количеств «Да» и «Нет». Так как этот минимум увеличился от 0 до 1009, причём с каждым ответом он изменялся не более чем на единицу, то принципиальных жителей хотя бы 1009.

Пример. Сначала все 1009 подпевал сказали «Нет», а потом 1009 рыцарей сказали «Да».

Замечание. Любой строй из 1009 принципиальных жителей можно проредить подпевалами так, чтобы выполнялось условие.

2. [7] *В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты AH_a и BH_b. Точки X и Y симметричны точкам H_a и H_b относительно середин сторон BC и CA соответственно. Докажите, что прямая CO делит отрезок XY пополам.*

(*Фольклор*)



Решение. Заметим, что $CX : CY = BH_a : AH_b = \cos\angle B : \cos\angle A$.

Кроме того, $\sin\angle OCX = \cos\angle A$, $\sin\angle OCY = \cos\angle B$. Отсюда $ZX : ZY = S_{CZX} : S_{CZY} = CX \sin\angle OCX : CY \sin\angle OCY = 1 : 1$, ч. т. д.

3. Докажите, что

а) [6] *любое число вида $3k - 2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;*

б) [2] *любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.* (*Н. Седракян*)

а) Достаточно заметить, что $k^3 - (k + 3)^3 + (3k + 5)^2 = 3k - 2$. **б**) Вычтем из числа, которое нужно представить, такой куб (0, 1 или –1), чтобы результат имел вид $3k - 2$, и применим пункт **а**).

4. [8] *Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник M, в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у M лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали M по описанным правилам.* (*Д. Захаров*)

Решение 1. Вместо клеток будем рассматривать их центры, которые назовём *узлами*. Проведём вертикальную прямую через самой левый узел бумажной фигуры. Если эта прямая не содержит других узлов фигуры, то будем поворачивать прямую по часовой стрелке до тех пор, пока на неё не попадёт ещё один узел фигуры. Мы нашли такую прямую l, содержащую не менее двух узлов фигуры, что все узлы фигуры лежат по одну сторону от l.

Каждый узел плоскости находится на каком-то ориентированном расстоянии от l (расстояния до узлов, лежащих в той же полуплоскости, что и фигура, берём со знаком минус). Пусть r – максимальное из таких расстояний до чёрных узлов. Докажем, что все узлы с расстоянием, большим r, останутся белыми. Предположим противное и рассмотрим первый такой узел, который стал чёрным. Значит, он накрыт сдвигом фигуры. Но тогда фигура накрывает ещё хотя бы один узел с таким же расстоянием (l фиксирована, расстояния – тоже, фигура сдвигается). Так как фигура накрывает хотя бы два белых узла, то окрашивать узел нельзя. Противоречие.

Решение 2. Построим клетчатый прямоугольник, содержащий все черные клетки. Обозначим прямую, содержащую правую сторону прямоугольника за p. Аналогично определим прямые l («левая»), v («верхняя»), n («нижняя»). Заметим теперь, что у M ровно одна самая верхняя клетка, иначе ни одна клетка выше v не будет покрашена (рассмотрим первый момент, когда многоугольник вышел за v, тогда у него выше v хотя бы две точки и они обе белые). Аналогично есть одна самая правая, левая и нижняя. Обозначим их V, P, L, N соответственно (ясно, что они все различны).

Покажем теперь, что если была покрашена клетка выше v, то она была покрашена клеткой V фигуры M. Предположим противное и возьмём первый момент, когда это не так. Тогда некая клетка выше v была закрашена другой клеткой фигуры M. Посмотрим на клетку, где в этот момент находилась V. Она тоже выше v, и при этом уже чёрная (иначе условие покраски не выполняется), значит была покрашена нами ранее. Но тогда она была покрашена клеткой V и фигура M лежала на плоскости так же. Но такого быть не может, так как тогда в M было бы не менее, чем две белые клетки. Аналогично доказываются утверждения про клетки правее p, левее l и ниже n. Рассмотрим теперь любую клетку, которая лежит и выше v, и правее p. С одной стороны она могла быть покрашена только клеткой V, с другой – только клеткой P. Значит покрасить мы её не можем.

Замечание. Связность фигуры-шаблона не важна. Если фигура не помещается ни в горизонталь, ни в вертикаль, то окрашено будет конечное число клеток.

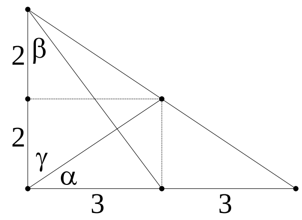
5. [8] *Три медианы треугольника разделили его углы на шесть углов, среди которых ровно k больше 30°. Каково наибольшее возможное значение k?* *(Н. Седракян)*

Ответ. $k = 3$.

Оценка. **Первый способ**. Пусть $h_1 \le h_2 \le h_3$ – высоты треугольника, m_1, m_2, m_3 – медианы из соответствующих вершин (на самом деле $m_1 \le m_2 \le m_3$, но это не будет использовано). Имеем тогда $m_3 \ge h_i$ для $i = 1, 2, 3$. Из конца m_3 опустим перпендикуляры на смежные стороны. Каждый из них равен половине соответствующей высоты и, значит, не больше $m_3/2$. Поэтому прилегающие к m_3 углы не больше 30°. Аналогично один из углов при m_2 не больше 30°.

Второй способ. Пусть дан треугольник ABC с медианами AX, BY, CZ. Оба угла BAX и BCZ не могут быть больше 30°: иначе точки A и C лежат внутри окружности с хордой ZX и диаметром, в два раза большим ZX, но при этом AC=2ZX, то есть отрезок, равный диаметру, лежит строго внутри окружности – противоречие. Аналогично в каждой из двух других пар максимум один угол больше 30°.

Пример 1. Рассмотрим сначала треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. Пусть BK и CL – его медианы. Тогда $\angle ACL = 30°$, $\angle BCL = 60°$, $\angle CBK > 30°$ (поскольку биссектриса угла B проходит между катетом и медианой). Теперь чуть уменьшим катет AC. При этом угол ACL немного увеличится (то есть станет больше 30°), а углы BCL и CBK немного уменьшатся, но останутся больше 30°.



Пример 2. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами 4 и 6 (см. рис.). Имеем $\operatorname{tg} 30° < \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta < \operatorname{tg} \gamma$, поскольку $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{3}{2}$.

6. [9] *На числовой оси отмечено бесконечно много точек с натуральными координатами. Когда по оси катится колесо, каждая отмеченная точка, по которой проехало колесо, оставляет на нём точечный след. Докажите, что можно выбрать такое действительное R, что если прокатить по оси, начиная из нуля, колесо радиуса R, то на каждой дуге колеса величиной в 1° будет след хотя бы одной отмеченной точки.* (*И. Митрофанов*)

Решение 1. Разделим колесо на 360 дуг и занумеруем их, начиная с точки O в порядке «прокатывания». Докажем индукцией по k, что можно выбрать окружность длины $360s$, прокатив которую по прямой, мы получим следы внутри первых k дуг.

База ($k = 1$). Достаточно выбрать s, большее координаты первой отмеченной точки.

Шаг индукции. По предположению индукции найдётся s_k, при котором следы оставлены на первых дугах. Пусть они оставлены точками с координатами $n_1, \ldots, n_k$.

Заметим, что незначительное изменение s не повлияет на ситуацию: те же точки оставят следы на тех же дугах. Пусть это происходит для всех $s \in (s_k(1 - \varepsilon), s_k(1 + \varepsilon))$. Рассмотрим отмеченную точку с координатой n_{k+1}, большей всех $n_1, \ldots, n_k$, а также $360s_k(\varepsilon^{-1} + 1)$. Пусть $m \le \frac{n_{k+1}}{360s_k} < m+1$ (m – целое число). Тогда $m > \varepsilon^{-1}$.

Найдём такое $s_{k+1} \in (s_k(1 - \varepsilon), s_k(1 + \varepsilon))$, чтобы точка n_{k+1} оставила след на данном расстоянии (по окружности) $360ts_{k+1}$ от O (число $t < 1$ выберем так, чтобы этот след оказался на (k+1)-й дуге окружности, соответствующей s_{k+1}). Иными словами, $n_{k+1} = 360(ms_{k+1} + ts_{k+1})$, откуда

$s_{k+1} = \frac{n_{k+1}}{360(m+t)} = \frac{r}{m+t}$, где $r = \frac{n_{k+1}}{360} < (m+1)s_k$. Это значение подходит, поскольку

$-\dfrac{r}{m(m+1)} < r\left(\dfrac{1}{m+1}-\dfrac{1}{m+t}\right) < s_k - s_{k+1} \le r\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{m+t}\right) < \dfrac{r}{m(m+1)}$, а $\dfrac{r}{m(m+1)} < \dfrac{s_k}{m} < \varepsilon s_k$.

Решение 2. Пусть на числовой прямой отмечено бесконечное число натуральных точек t_1, t_2, t_3, ...

Докажем индукцией по n такое утверждение: для любого набора положительных чисел a_1, ..., a_n с суммой 1 найдётся колесо такой длины S, что разделив его на дуги длин a_1S, ..., a_nS (именно в таком порядке) и запустив из 0 (поставив в 0 началом первой дуги), мы обязательно получим строго внутри каждой из дуг след какой-то отмеченной точки.

Для наглядности покрасим каждую дугу в свой цвет и прокатим колесо по прямой, считая, что каждая точка прямой окрашивается в цвет дуги, которая по точке проезжает. Тогда прямая разобьётся на отрезки n разных цветов, соответствующих дугам. Нам надо найти такую длину колеса, чтобы для каждого цвета нашлась отмеченная точка, попавшая внутрь отрезка этого цвета.

Сначала заметим, что если для данного набора нужное S найдено, то подойдёт также любое колесо чуть меньшей или чуть большей длины. В самом деле, колесо длины S соберёт по отметке на каждую дугу, пройдя определённое расстояние. Это соответствует тому, что некоторые отмеченные точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ лежат на прямой каждая строго внутри отрезка своего цвета (цвета все различны). Небольшое изменение длины колеса соответствует гомотетии прямой с центром в 0 и коэффициентом, близким к 1. Ясно, что можно выбрать коэффициент гомотетии настолько близким к 1, что картина не изменится: все точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ останутся внутри своих «растянутых» отрезков.

Перейдём к доказательству.

База $n = 1$ очевидна: можно взять колесо иррациональной или просто достаточно большой длины.

Шаг индукции. Пусть для всех наборов из n чисел утверждение доказано. Докажем его для набора a_1, ..., a_n, a_{n+1}. Рассмотрим набор a_1, ..., a_{n-1}, $a_n + a_{n+1}$. Для него нужное S найдётся. Рассмотрим момент, когда в каждой из дуг для этого набора образуется след от отмеченной точки.

Это соответствует тому, что отмеченные точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ лежат на прямой строго внутри отрезков n разных цветов, точка t_{i_n} лежит на отрезке длины $(a_n + a_{n+1})S$. Если точка t_{i_n} делит свой отрезок как раз в отношении $a_n : a_{n+1}$, увеличим немного S, чтобы все точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ попали на свои же «растянутые» отрезки, но точка t_{i_n} уже делила бы свой отрезок в другом отношении.

Теперь вернёмся к набору a_1, ..., a_n, a_{n+1}, прокатим колесо найденной длины S по прямой.

Точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ попадут в отрезки разных цветов, и только отрезки одного, скажем, зелёного цвета (соответствующие одной из дуг a_nS, $a_{n+1}S$, пусть дуге $a_{n+1}S$), возможно, не содержат ни одной отмеченной точки.

Заметим, что есть сколь угодно большие отмеченные точки, на расстоянии не более чем S слева от которых есть зелёный отрезок. Пусть мы можем делать гомотетию с коэффициентом, не большим $1+\varepsilon$ так, чтобы точки $t_{i_1}, ..., t_{i_n}$ остались внутри своих «растянутых» отрезков.

Проедем колесом настолько большое расстояние K, чтобы колесо сделало целое число оборотов (последний окрашеный отрезок Z зелёный), уже собрало отметки на все дуги, кроме последней, чтобы $K\varepsilon$ было больше S, и чтобы на расстоянии не более S после точки K нашлась отмеченная точка $t_{i_{n+1}}$.

Увеличим длину колеса, сделав гомотетию с коэффициентом $1 + x$, где $x < \varepsilon$. Тогда зелёный отрезок Z растянется, его новыми концами будут точки $K + xK - (1 + x)Sa_{n+1}$ и $K + xK$ соответственно. Очевидно, можно подобрать $x < \varepsilon$ так, чтобы $K + Kx$ стало больше $t_{i_{n+1}}$ (ведь $K\varepsilon > S$), но при этом больше на величину, меньшую Sa_{n+1}. Тогда $K + xK - (1 + x)Sa_{n+1}$ будет меньше $t_{i_{n+1}}$, то есть точка $t_{i_{n+1}}$ попадёт на «растянутый» зелёный отрезок Z.

7. *Рокфеллер и Маркс играют в такую игру. Имеется $n > 1$ городов, во всех одно и то же число жителей. Сначала у каждого жителя есть ровно одна монета (монеты одинаковы). За ход Рокфеллер выбирает по одному жителю из каждого города, а Маркс перераспределяет между ними их деньги произвольным образом с единственным условием, чтобы распределение не осталось таким, каким только что было. Рокфеллер выиграет, если в какой-то момент в каждом городе будет хотя бы один человек без денег. Докажите, что Рокфеллер может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл Маркс, если в каждом городе*

а) [10] *ровно 2n жителей;*

б) [4] *ровно 2n – 1 житель.* (*Г. Погудин*)

Пусть k – количество жителей в городе. Будем изображать ситуацию в игре таблицей с n строками и k столбцами: в i-й строке будут перечислены благосостояния $a_{i1}, ..., a_{ik}$ всех жителей i-го города в порядке неубывания. Пусть S_j – сумма чисел в j-м столбце.

а) *Стратегия Рокфеллера*. Если $S_j = S_{j+1}$, выбрать всех жителей из j-го столбца.

Предположим, что $S_j = S_{j+1}$; тогда $a_{ij} = a_{i,j+1}$ при всех i. После марксова перераспределения числа $S_{j+1}, ..., S_k$ не уменьшатся. С другой стороны, у одного из выбранных жителей (пусть он в i-м городе) благосостояние станет больше чем a_{ij}. Это значит, что одна из сумм S_k при $k \geq j + 1$ увеличится (та, в которую попало новое число). Поэтому последовательность $S_k, S_{k-1}, ..., S_1$ лексикографически увеличится. Это не может продолжаться бесконечно долго (ибо наборов из k чисел с фиксированной суммой конечное количество), так что в некоторый момент все числа $S_1, ..., S_k$ окажутся различными.

Пусть $S_1 \geq 1$. Тогда $S_i \geq i$ при всех i, откуда $nk = S_1 + ... + S_k \geq 1 + 2 + ... + k = ½\, k(k + 1)$, то есть $k \leq 2n – 1$. Противоречие.

Значит, $S_1 = 0$, и Рокфеллер победил..

б) Пусть $k = 2n – 1$. Применяя стратегию из пункта **а**), Рокфеллер либо выиграет, либо добьётся состояния $S_i = i$ при всех $i = 1, ..., k$. Покажем, как ему выиграть, начиная с такой позиции.

Скажем, что игра находится в *i-й ситуации* $(1 \leq i \leq n + 1)$, если (возможно, после перенумерации строк) выполнены следующие условия:

1) при $j = 1, 2, ..., i – 1$ в j-м столбце стоят j единиц в верхних клетках, а остальные числа – нули;

2) в i-м столбце нижние $n + 1 – i$ элементов – нули.

Покажем, что в рассматриваемый момент игра находится в i-й ситуации при некотором i. Переставим строки так, чтобы количества нулей в них не убывали сверху вниз. Пусть при некотором $i \leq n$ в i-м столбце не стоит i единиц; выберем наименьшее такое i. Тогда (из условия на нули в строках) в предыдущих столбцах единицы стоят «треугольником», а в i-м столбце есть $n + 1 – i$ нулей, то есть игра в i-й ситуации. Если же такого i нет, то в первых n столбцах единицы стоят «треугольником», и игра в $(n+1)$-й ситуации.

Покажем, что при $i > 1$, если игра в i-й ситуации, Рокфеллер может уменьшить номер ситуации одним ходом. Так он рано или поздно добьётся 1-й ситуации, то есть своего выигрыша.

Действительно, Рокфеллер выбирает $(i–1)$-й столбец. Пусть j – наименьший индекс, при котором число в j-й строке уменьшится (т.е. превратится в 0) в результате действия Маркса. Поскольку $j \leq i–1$, то после этого хода (и упорядочивания строк, при котором этот 0 переместится в начало строки) будет наблюдаться j-я ситуация (здесь мы уже не требуем равенств $S_k = k$), что и требовалось.