

40-й Международный математический Турнир городов

Решения задач весеннего тура

Базовый вариант

Старшие классы

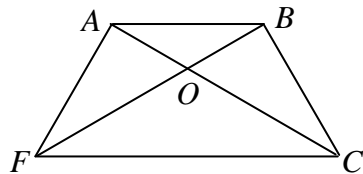
1. [4] Расстояние от некоторой точки внутри правильного шестиугольника до трёх его последовательных вершин равны 1, 1 и 2 соответственно. Чему равна сторона этого шестиугольника?

М. Евдокимов

Ответ: $\sqrt{3}$.

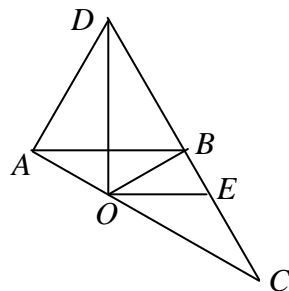
Пусть A, B, C – последовательные вершины шестиугольника, O – точка внутри него, и пусть $OA = OB = 1$, $OC = 2$.

Решение 1. Рассмотрим другую соседнюю с A вершину F . Тогда $FABC$ – равнобедренная трапеция (см. рисунок). Точка O лежит на общем серединном перпендикуляре её оснований FC и AB , поэтому $OF = OC = 2$. Но $FC = 2AB$ (в правильном



шестиугольнике главная диагональ в 2 раза больше стороны), откуда треугольники AOB и FOC подобны с коэффициентом 2. Поскольку AB и FC параллельны и $\angle BAO = \angle OCF$, точка O лежит на диагонали AC (и, аналогично, точка O лежит на диагонали BF). Тогда $\angle OBC = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, и $BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника OBC .

Решение 2. Точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB . Построим вне шестиугольника равносторонний треугольник ABD (рис. справа). Ясно, что тогда OD – серединный перпендикуляр к отрезку AB . Кроме того, так как $DB : DC = 1 : 2 = OB : OC$, то OD – биссектриса внешнего угла O треугольника BOC . Значит, она перпендикулярна биссектрисе OE угла BOC . В силу равенства $\angle BAO = \angle ABO = \angle BOE = \angle EOC$, точки A, O, C лежат на одной прямой. В треугольнике ADC , $\angle D = 60^\circ$, $DC = 2DA$, откуда угол DAC прямой, а $AB = AD = AC \operatorname{ctg} \angle D = 3 \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3}$.



2. [4] Натуральные числа a и b таковы, что $a^{n+1} + b^{n+1}$ делится на $a^n + b^n$ для бесконечного множества различных натуральных n . Обязательно ли тогда $a = b$?

Б. Френкин

Ответ: обязательно.

Решение 1. Пусть, например, $a > b$. Дробь $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$ меньше a при всех натуральных n (очевидно после умножения на знаменатель), но стремится к a при $n \rightarrow \infty$ (в самом деле, поделив числитель и знаменатель на a^n и заметив, что $\left(\frac{b}{a}\right)^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получим, что числитель дроби стремится к a , а знаменатель – к 1). Значит, $a - 1 < \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} < a$ при достаточно больших n и не может быть целым. Противоречие.

Решение 2. Пусть, например, $a > b$. Тогда $b < \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} < a$ при всех натуральных n (очевидно после умножения на знаменатель). Так как между b и a конечное число целых чисел, найдутся такие различные натуральные m и k , что $\frac{a^{m+1} + b^{m+1}}{a^m + b^m} = \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{a^k + b^k}$. Умножив на знаменатели и приводя подобные, получим $a^m b^k (a - b) = a^k b^m (a - b)$. Сократив на $a - b$, имеем $\left(\frac{a}{b}\right)^{m-k} = 1$, откуда либо $a = b$, либо $m = k$ – противоречие.

Решение 3. Пусть наибольший общий делитель чисел a и b равен d , то есть $a = ud$, $b = vd$, где u и v взаимно просты. Из условия, сократив на d , получаем, что $d(u^{n+1} + v^{n+1})$ делится на $u^n + v^n$ для бесконечного множества натуральных n . Поскольку u и v взаимно просты, числа $u^{n+1} + v^{n+1}$ и $u^n + v^n$ взаимно просты с u и v , а кроме того, могут иметь общим множителем максимум $|v - u|$ (это следует из того, что $u^{n+1} + v^{n+1} - u(u^n + v^n) = v^n(v - u)$).

Но ненулевое число, не превосходящее $d \cdot |v - u|$, не может делиться на $u^n + v^n$ для бесконечно многих n . Значит, $u = v$, откуда $a = b$.

3. [4] Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 2019 четырёхугольников, каждый из которых одновременно вписанный и описанный.

Н. Седракан

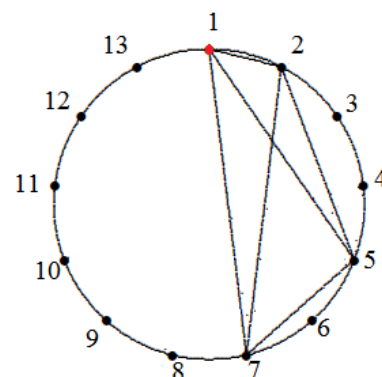
Решение. Признак вписанности четырёхугольника — равенство сумм противоположных углов, признак описанности — равенство сумм противоположных сторон. Если из центра вписанной в треугольник окружности опустить перпендикуляры на стороны треугольника, он разобьётся на три четырёхугольника, обладающих обоими этим свойствами. Чтобы разбить треугольник на 2019

таких четырёхугольников, достаточно разбить его на $2019:3 = 673$ треугольника (например, отрезками, исходящими из одной вершины), а потом каждый из них — на три четырёхугольника, как показано выше.

4. [5] Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 13 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

К. Кноп

Решение. Мысленно расположим шкатулки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 13 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулками в дугах. Между любыми двумя шкатулками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать «шаблон» – четырёхугольник с вершинами в шкатулках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображён на рисунке (четырёхугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным.



Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он «накрыл» обе шкатулки с монетами. Помощник так и делает, а открывает шкатулку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулкой, открытой помощником, и находит монеты.

Это же решение можно изложить другими словами. Занумеруем шкатулки остатками по модулю 13. Если помощник открывает шкатулку с номером k , то фокусник открывает шкатулки с номерами $k + 1$, $k + 2$, $k + 5$ и $k + 7$. Поскольку любая пара шкатулок имеет вид $\{n, n + 1\}$, $\{n, n + 2\}$, $\{n, n + 3\}$, $\{n, n + 4\}$, $\{n, n + 5\}$ или $\{n, n + 6\}$, то помощник всегда найдёт четвёрку шкатулок нужного вида, содержащую пару шкатулок с монетами.

Для знатоков. Мы описали *конечную проективную плоскость над полем \mathbb{Z}_3* , где шкатулки выступают в роли точек, а шаблоны — в роли прямых. На этой плоскости как раз 13 точек и 13 прямых, причём на каждой прямой лежит по 4 точки.

5. [5] В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 2019. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 40. Какое наибольшее количество чисел могло быть выписано?

А. Шаповалов

Ответ: 1019 чисел.

Лемма. Сумма любых сорока подряд записанных чисел не меньше 80.

Доказательство. Пусть числа a_1, \dots, a_{40} записаны подряд. Среди чисел $b_0 = 0$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, \dots , $b_{40} = a_1 + a_2 + \dots + a_{40}$ найдутся два b_i и b_j ($i < j$) с одинаковым остатком при делении на 40. Тогда сумма $a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$ кратна 40, а значит, не меньше 80.

Решение. *Оценка.* Пусть выписано $n > 1019$ чисел. По лемме, сумма первых $1000 = 25 \cdot 40$ из них не меньше $25 \cdot 80 = 2000$. Сумма оставшихся чисел (их по крайней мере 20) не меньше 20. Значит, вся сумма не меньше 2020. Противоречие.

Пример. 25 групп 1, ..., 1, 41 (в каждой группе 39 единиц и число 41) и затем 19 единиц.