40-й Международный математический Турнир городов

Решения задач осеннего тура

Старшие классы

Базовый вариант

1. [3] *Можно ли внутри правильного пятиугольника разместить отрезок, который из всех вершин виден под одним и тем же углом?* *(Е. Бакаев, С. Дворянинов)*

Ответ. Нельзя. **Решение**. Предположим, что удалось так разместить отрезок XY. По какую-то сторону от прямой XY окажутся три вершины пятиугольника – пусть A, B и C. Тогда точки A, B, C, X, Y лежат на одной окружности. Она совпадёт с окружностью, описанной около правильного пятиугольника, поскольку имеет с ней три различные общие точки. Следовательно, точки X и Y лежат не внутри пятиугольника. Противоречие.

2. [4] *Найдите все натуральные n, удовлетворяющие условию: числа 1, 2, 3, …, 2n можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, получится квадрат натурального числа.* *(Фольклор)*

Ответ: все $n > 1$. **Решение**. $1 + 2$ – не квадрат. Пусть $n > 1$.

1-й способ. Разобьём эти числа на четвёрки подряд идущих, и, если надо, шестёрку первых чисел. Из четвёрок образуем $(a + (a + 3))((a + 1) + (a + 2)) = (2a + 3)^2$, из шестёрки – $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6)=18^2$.

2-й способ. Если n чётно, то $(1 + 2n)(2 + (2n - 1))\ldots(n + (n + 1)) = (2n + 1)^n$ – квадрат. Если n нечётно, то $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6)(7 + 2n)(8 + (2n - 1))\ldots((n + 3) + (n + 4)) = 18^2(2n + 7)^{n-3}$ – квадрат.

Замечание. Для $n = 2, 3$ разбиение единственно, в остальных случаях – нет.

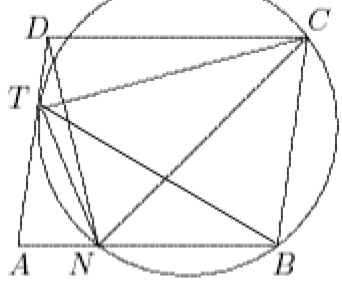
3. [5] *В параллелограмме ABCD угол A острый. На стороне AB отмечена такая точка N, что CN = AB. Оказалось, что описанная окружность треугольника CBN касается прямой AD. Докажите, что она касается её в точке D.* *(М. Евдокимов)*

Решение. Пусть она касается её в точке T.

Первый способ. Так как $BC \parallel AD$, то $BT = CT$. Из равенства вписанных углов NBT и NCT получаем равенство треугольников ABT и NCT. Поэтому $\angle TAB = \angle TNC = \angle TBC = \angle TCB$. Значит, $ABCT$ – параллелограмм, то есть T совпадает с D.

Второй способ. Понятно, что точка T лежит на луче AD. Поскольку $CN = AB = CD$, то $\angle CND = \angle CDN = \angle AND$, то есть ND – биссектриса угла ANC.

С другой стороны, $\angle ATN = \angle TCN$, $\angle TAN = 180° - \angle CBN = \angle CTN$, поэтому и $\angle ANT = \angle TNC$, то есть NT – тоже биссектриса угла ANC. Так как прямые NT и ND совпадают, то и точки T и D – тоже.



Замечание. Решение не зависит от расположения точки T.

4. [5] *Назовём девятизначное число* <u>*красивым*</u>*, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 2018 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.* *(М. Евдокимов)*

Будем записывать красивое число $\overline{a_8\ldots a_0}$ в виде таблицы (см. рис.). Так как $10^6 - 1 = 999999$ делится на 999, то $\overline{a_8\ldots a_0} = 10^8 a_8 + \ldots + a_0 \equiv 100(a_8 + a_5 + a_2) + 10(a_7 + a_4 + a_1) + (a_6 + a_3 + a_0) \pmod{999}$.

a_8	a_7	a_6
a_5	a_4	a_3
a_2	a_1	a_0

Поэтому из красивого числа, кратного d, где d – делитель числа 999, перестановками внутри столбцов можно получить $6^3 = 216$ красивых чисел, кратных d (если первый столбец содержит нуль, то на 72 числа меньше).

1-е решение. Рассмотрим таблицу справа. Суммы в её столбцах одинаковые. Поэтому соответствующее красивое число кратно 111. Переставляя столбцы местами, получим $6 \cdot 216$ красивых чисел, кратных 111. Так как по строкам суммы тоже одинаковые, то, отразив эту табличку относительно диагонали, получим ещё столько же чисел, а всего – 2592 красивых числа, кратных 111, а значит, кратных и 37.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Замечание. Приведённая таблица называется *магическим квадратом*. Помимо содержащихся в нём двух способов скомпоновать из различных цифр три равные суммы по три слагаемых есть ещё ровно 6 способов сделать это. И все они получаются из магического квадрата! Покажем это. Уменьшим в нём цифры 1, 2, 3 на единицу. Получим два способа, дающих по $1296 - 2 \cdot 72 = 1152$ числа. После этого уменьшим цифры 4, 5, 6. Получим ещё два способа. Наконец, уменьшим 7, 8, 9, получая ещё два способа. Всего таким методом получается 9504 красивых числа, кратных 111.

Для двух следующих решений нам понадобится следующая

Лемма. Пусть d – делитель числа 999. Если $100x + 10y + z$ кратно d, то и числа $100y + 10z + x$ и $100z + 10x + y$ кратны d.

Доказательство. $100y + 10z + x = 10(100x + 10y + z) – 999x$.

2-е решение. Поищем красивые числа, кратные 999. Заметим, что $100\cdot 8 + 10\cdot 18 + 19 = 999$. Легко найти пять разбиений ненулевых цифр на столбцы с суммами 19, 18, 8 справа налево (левый столбец не указываем, он получается автоматически): 982, 765; 973, 864; 964, 873; 874, 963; 865, 972. Учитывая циклические сдвиги столбцов, всего получим $5\cdot 3\cdot 216 = 3240$ красивых чисел, кратных 999.

Замечание. Другие красивые числа, кратные 999, можно получить, дополняя все цифры до 9. При этом $5\cdot 72$ чисел будут начинаться с нуля, их надо отбросить. Всего получится 6120 красивых чисел, кратных 999. Нетрудно показать, что других красивых чисел, кратных 999, нет!

Третий способ (навеяно идеей Алиева Рашида, 10 кл., г. Махачкала). Рассмотрим таблицу справа. Числа, читаемые в строках, делятся на 37, поскольку отличаются на 111. Поэтому соответствующее таблице девятизначное число кратно 37. Осуществляя циклические сдвиги внутри строк, получим 27 таблиц, каждая из которых даёт по 216 красивых чисел, кратных 37 (см. лемму). Для девяти из этих таблиц надо вычесть по 72 числа. Всего получается $24\cdot 216 = 5184$ красивых числа, кратных 37.

0	3	7
1	4	8
2	5	9

Замечания. **1**. Ещё столько же красивых чисел получится из таблицы справа. Из указанных шести трёхзначных чисел можно составить ещё две такие таблицы. Следовательно, этот метод даёт 20736 красивых чисел, кратных 37.

0	7	4
1	8	5
2	9	6

2. Всего существует 89712 красивых чисел, кратных 37, из них 34416 чисел кратны 111.

5. [5] Петя *расставляет 500 королей на клетках доски 100×50 так, чтобы они не били друг друга. А Вася – 500 королей на белых клетках (в шахматной раскраске) доски 100×100 так, чтобы они не били друг друга. У кого больше способов это сделать?* *(Е. Бакаев)*

Ответ. У Васи больше. **Решение**. Каждой Петиной расстановке поставим в соответствие некоторую расстановку Васи, причём разным расстановкам – разные. Приведём два способа сделать это, для каждого из них найдётся Васина расстановка, которая этим способом не получается. Например, когда короли занимают все белые клетки в каких-то десяти горизонталях, попарно не соседних. Поэтому Васиных расстановок будет больше.

Первый способ. Назовём правую сторону Петиной доски *осью*. Рассмотрим любую расстановку Пети. Отразив всех её королей на чёрных клетках относительно оси, получим какую-то расстановку Васи: 500 королей на белых клетках доски 100×100. Действительно, короли на одной половине доски не будут бить друг друга, потому что до этого не били. А из разных половин друг друга могут бить только короли, соседние с осью отражения. Но соответствующие «чёрные» короли сдвинулись на одну клетку через ось, поэтому тоже не бьют королей со своей бывшей вертикали.

Второй способ (Алиев Рашид, 10 кл., г. Махачкала). Разобьём каждую горизонталь Васиной доски на доминошки. Доминошки образуют доску 100×50. Как бы ни расставил Петя 500 королей в центры доминошек, Вася может сдвинуть каждого короля в белую клетку доминошки. Если после этого какие-то два короля будут бить друг друга, то они будут находиться в соседних доминошках, поэтому били друг друга и в Петиной расстановке.