

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 11 марта 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 4 1. У Аладдина есть несколько одинаковых слитков золота, и иногда он просит джинна увеличить их количество. Джинн добавляет тысячу таких же слитков, но после этого берёт за услугу ровно половину от получившейся общей массы золота. Мог ли Аладдин оказаться в выигрыше после десяти таких просьб, если ни один слиток не пришлось распиливать?
Александр Перепечко
- 5 2. Существуют ли такие 2018 положительных несократимых дробей с различными натуральными знаменателями, что знаменатель разности любых двух из них (после приведения к несократимому виду) меньше знаменателя любой из исходных 2018 дробей?
Максим Дидин
- 6 3. В таблице 10×10 записано 100 различных чисел. За ход можно выбрать любой составленный из клеток прямоугольник и переставить все числа в нем симметрично относительно его центра («повернуть прямоугольник на 180° »). Всегда ли за 99 ходов можно добиться, чтобы числа возрастали в каждой строке слева направо и в каждом столбце — снизу вверх?
Александр Шаповалов
- 4 4. Правильный треугольник, лежащий в плоскости α , ортогонально спроектировали на непараллельную ей плоскость β , полученный треугольник ортогонально спроектировали на плоскость γ и получили снова правильный треугольник. Докажите, что
4 а) угол между плоскостями α и β равен углу между плоскостями β и γ ;
4 б) плоскость β пересекает плоскости α и γ по перпендикулярным друг другу прямым.
Лев Емельянов
- 10 5. В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a-b$, $b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a , b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a - 18b$.
Николай Белухов
- 10 6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Лучи BA и CD пересекаются в точке P . Прямая, проходящая через P и параллельная касательной к окружности в точке D , пересекает в точках U и V касательные, проведённые к окружности в точках A и B . Докажите, что окружности, описанные около треугольника CUV и четырёхугольника $ABCD$, касаются.
Алексей Заславский
- 12 7. Король решил поощрить группу из n мудрецов. Их поставят в ряд друг за другом (чтобы все смотрели в одном направлении), на каждого наденут черную или белую шляпу. Каждый будет видеть шляпы всех впереди стоящих. Мудрецы по очереди (от последнего к первому) назовут цвет (белый или черный) и натуральное число по своему выбору. В конце подсчитывается число мудрецов, которые назвали цвет, совпадающий с цветом своей шляпы: ровно столько дней всей группе будут платить надбавку к жалованью. Мудрецам разрешили договориться заранее, как отвечать. При этом мудрецы знают, что ровно k из них безумны (кто именно — им неизвестно). Безумный мудрец называет белый или черный цвет и число вне зависимости от договоренностей. Какое максимальное число дней с надбавкой к жалованью могут гарантировать группе мудрецы, независимо от местонахождения безумных в очереди?
Иван Митрофанов