ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 25 марта 2018 г.

Предварительная версия решений.

1. *Хозяйка испекла квадратный торт и отрезала от него несколько кусков. Первый разрез проведён параллельно стороне исходного квадрата от края до края. Следующий разрез проведён в оставшейся части от края до края перпендикулярно предыдущему разрезу, далее аналогично (сколько-то раз). Все отрезанные куски имеют равную площадь. Может ли оставшаяся часть торта быть квадратом?*

Ответ. Нет, не может. **Решение.** Часть, оставшуюся после очередного разрезания, назовём остатком. Длиной остатка назовём размер той его стороны, по которой он отрезан, а шириной — размер другой стороны. Длиной отрезаемого прямоугольника (куска) также будем считать размер стороны, по которой он отрезан, а шириной — размер другой стороны. Индукцией по номеру разрезания покажем, что ширина остатка всегда меньше его длины (что и решает задачу).

После первого разрезания это очевидно. Пусть после i-го разрезания длина остатка и отрезанного куска равна l_i, ширина остатка и отрезанного куска равна соответственно w_i и z_i; положим также l_0 и w_0 равными стороне исходного квадрата). Пусть при всех $1 \leqslant j \leqslant i$ было $l_j > w_j$. Имеем

$$l_i = w_{i-1} \leqslant l_{i-1} \qquad (*)$$

(равенство выполнено лишь при $i = 1$). Площади i-го и $(i+1)$-го кусков одинаковы по условию, т.е. $l_i z_i = l_{i+1} z_{i+1} = w_i z_{i+1} < l_i z_{i+1}$, откуда

$$z_i < z_{i+1} \qquad (**).$$

С другой стороны, $z_i = l_{i-1} - w_i$, $z_{i+1} = l_i - w_{i+1}$. С учётом (*) и (**) получаем: $w_{i+1} < w_i = l_{i+1}$, ч.т.д.

2. *Пусть X — некоторая фиксированная точка на стороне AC треугольника ABC (X отлична от A и C). Произвольная окружность, проходящая через X и B, пересекает отрезок AC и описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q, отличных от X и B. Докажите, что все возможные прямые PQ проходят через одну точку.*

Решение. Обозначим вторую точку пересечения PQ и окружности (ABC) через S.

Тогда $\angle(BX, XC) = \angle(BX, XP) = \angle(BQ, QP) = \angle(BQ, QS) = \text{const}$ (равенство в ориентированных углах). Получили, что угол (BQ, QS), опирающийся на дугу BS окружности (ABC), постоянный, а значит и длина дуги BS постоянна, и тогда точка S не зависит от выбора окружности.

3. *16 карточек с целыми числами от 1 до 16 разложены лицевой стороной вниз в виде таблицы 4×4 так, что карточки, на которых записаны соседние числа, лежат рядом (соприкасаются по стороне). Какое наименьшее число карточек нужно одновременно перевернуть, чтобы наверняка определить местоположение всех чисел (как бы ни были разложены карточки)?*

Ответ. Восемь карточек

Решение.

Оценка. Занумеруем клетки, как показано на рисунке 1. Заметим, что одна из клеток с номером 1 должна быть открыта, иначе красный и синий способы заполнения таблицы на рисунке 2 были бы неразличимы. Одна из клеток с номером 2 также должна быть открыта, иначе красный и синий способы заполнения таблицы на рисунке 3 были бы неразличимы.

Аналогично, должны быть открыты хотя бы по одной из клеток с номерами 3, 4, 5, 6, 7, 8, то есть должно быть открыто не менее 8 карточек.

1	2	3	4
2	1	4	3
5	6	7	8
6	5	8	7

Рис. 1

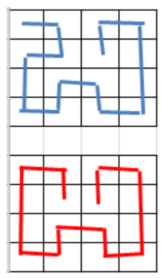


Рис. 2

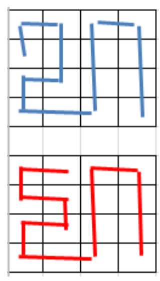


Рис. 3

Пример. Докажем, что увидев числа во втором и третьем столбце, мы сможем восстановить числа в первом и четвёртом столбцах. Заметим, что в чёрных клетках шахматной раскраски все числа одной чётности, в белых — другой. Увидев второй и третий столбцы, мы понимаем, в какой клетке какая чётность.

Из открытых клеток выделим те, для которых у записанного в клетке числа не все соседние числа открыты. Из каждой такой клетки проведём ребро в единственную неперевёрнутую соседнюю клетку и однозначно восстановим в ней число.

Заметим, что если в угол ведёт ребро, то мы восстановим число в нём. Если же в угловую клетку не ведёт ребро, то в ней стоит крайнее число, то есть 1 или 16, а так как мы знаем чётность числа в каждой клетке, то в этом случае мы тоже восстановим число в углу. Итак, числа в углах заведомо восстановлены.

Если среди угловых есть клетки, для которых не все соседние числа открыты, из каждого такого угла проведём ребро в неперевёрнутую соседнюю клетку и однозначно восстановим число в ней.

Остались не восстановленными разве что числа в неугловых клетках первого и четвёртого столбца. Рассмотрим любую из них. В неё не ведёт ребро ни из соседнего столбца, ни из угла, а тогда в этой клетке точно крайнее число (так как у неё осталась максимум одна клетка с соседним числом). По чётности легко узнаём, какое крайнее число там должно стоять.

Таким образом, мы восстановили числа во всех клетках.

4. *Имеется натуральное 1001-значное число A. 1001-значное число Z – то же число A, записанное от конца к началу (например, для четырёхзначных чисел это могли быть 7432 и 2347). Известно, что $A > Z$. При каком A частное A/Z будет наименьшим (но строго больше 1)?*

Ответ. При A, запись которого (слева направо) такая: 501 девятка, восьмёрка, 499 девяток.

Решение 1. Пусть $A = \overline{a_{1000}a_{999}\dots a_0}$. Поскольку $A > Z$, среди цифр $a_0, a_1, \dots, a_{499}$ есть хотя бы одна недевятка. Значит, $Z \leqslant Z_0 = \underbrace{99\dots9}_{499}8\underbrace{99\dots9}_{501}$.

Покажем, что $A - Z \geqslant 10^{501} - 10^{499}$. Отсюда будет следовать, что
$$\frac{A}{Z} - 1 \geqslant \frac{10^{501} - 10^{499}}{Z_0};$$
эта оценка достигается при $Z = Z_0$, что и даёт ответ.

Имеем
$$A - Z = (a_{1000} - a_0)(10^{1000} - 1) + (a_{999} - a_1)(10^{999} - 10) + \dots + (a_{501} - a_{499})(10^{501} - 10^{499}) =$$
$$= \varphi_{499}\Delta_{499} + \varphi_{498}\Delta_{498} + \dots + \varphi_0\Delta_0,$$
где $\varphi_i = a_{501+i} - a_{499-i}$ и $\Delta_i = 10^{501+i} - 10^{499-i}$ при $i = 0, 1, \dots, 499$. Заметим, что $\Delta_{i+1} > 10\Delta_i$.

Пусть j — наибольший индекс, при котором $\varphi_j \neq 0$. Тогда
$$|\varphi_j\Delta_j + \varphi_{j-1}\Delta_{j-1} + \dots + \varphi_0\Delta_0| \geqslant |\varphi_j\Delta_j| - |\varphi_{j-1}\Delta_{j-1}| - \dots - |\varphi_0\Delta_0| \geqslant$$
$$\geqslant \Delta_j\left(1 - \frac{9}{10} - \frac{9}{100} - \dots - \frac{9}{10^j}\right) = \frac{\Delta_j}{10^j} \geqslant \Delta_0,$$
что и требовалось.

Решение 2. Ясно, что можно минимизировать (положительное) число $\frac{A}{Z} - 1 = \frac{A-Z}{Z}$.

Пронумеруем цифры в A слева направо $a_1, a_2, \dots, a_{1001}$. Пусть k — наименьший номер, для которого $a_k \neq a_{1002-k}$ (тогда $k \leqslant 500$ и $a_k > a_{1002-k}$, ибо $A > Z$).

Рассмотрим произвольный оптимальный пример. Заменим первые и последние $k - 1$ цифр на девятки. $A - Z$ не изменится, Z не уменьшится, то есть наша дробь не увеличится. По этой же причине a_{501} можно заменить на 9.

Заменим a_k на 9, а a_{1002-k} на 8. При этом $A - Z$ не увеличится, а Z не уменьшится.

Заменим все цифры $a_{k+1}, \dots, a_{500}$ на нули, а $a_{502}, \dots, a_{1001-k}$ на девятки. Тогда $A - Z$ не увеличится, а Z если и уменьшится, то на меньшую величину (это произойдёт только тогда, когда вторая половина и так была девятками!). Поскольку в оптимальном примере $A - Z < Z$ (в первом просто меньше цифр), то, ясно, $\frac{A-Z}{Z}$ не возрастёт.

Итак, можно считать, что A имеет вид
$$\underbrace{99\dots9}_{k}\underbrace{00\dots0}_{500-k}9\underbrace{99\dots9}_{500-k}8\underbrace{99\dots9}_{k-1}.$$
В этом случае
$$A - Z = 10^{501} + 10^{500} - 10^k - 10^{k-1}.$$
Это выражение достигает минимума при $k = 500$, и при этом же k достигается максимум значения рассматриваемых Z. Значит, это и есть ответ.

5. *Можно ли расположить в пространстве пять сфер так, чтобы для каждой из сфер можно было провести через ее центр касательную плоскость к остальным четырем сферам? Сферы могут пересекаться и не обязаны иметь одинаковый радиус.*

Ответ. Да, можно.

Решение 1. Возьмём в горизонтальной плоскости α правильный треугольник с высотой 2. Пусть J — центр одной из его вневписанных окружностей, а A, B, C — середины его сторон.

Выберем такие сферы: три с центрами в A, B, C радиуса 1; две радиуса 2 с центрами в точках J' и J'', получающихся из J поднятием и опусканием относительно α на 1.

Теперь осталось провести требуемые плоскости. Плоскость через J', параллельная α, касается четырёх остальных сфер; для J'' аналогично. Осталось провести плоскость, скажем, через A; она перпендикулярна α и содержит сторону треугольника, на которой лежит A.

Все проверки достаточно просты.

Решение 2. Ответ: да.

Центр сферы S_0 поместим в точке A_0 с координатами $(0,0,0)$, радиус r этой сферы выберем позже. Остальные сферы S_i, $i = 1,2,3,4$ возьмем радиуса 1, а центры этих сфер поместим в точки $A_1(a,0,1)$, $A_2(-a,0,1)$, $A_3(0,a,-1)$, $A_4(0,-a,-1)$ (a выберем позже).

Плоскость Oxy проходит через A_0 и касается сфер S_i, $i = 1,2,3,4$.

Можно подобрать a так, чтобы плоскость $A_2A_3A_4$ находилась на расстоянии $\varrho_1 = 1$ от точки A_1, тогда плоскость σ_1, проходящая через A_1 и параллельная плоскости $A_2A_3A_4$, будет касаться сфер S_i, $i = 2,3,4$. Действительно, уравнение плоскости $A_2A_3A_4$: $2x + az + a = 0$. Тогда $\varrho_1 = \dfrac{4a}{\sqrt{4+a^2}}$ и достаточно положить $a = \sqrt{\dfrac{4}{15}}$.

Положим r равным расстоянию от A_0 до плоскости σ_1, так, чтобы плоскость σ_1 касалась также и сферы S_0.

Конструкция переводится в себя при симметрии относительно плоскостей Oxz, Oyz, а также при композиции поворота на 90° вокруг оси Oz и симметрии относительно плоскости Oxy. Поэтому условие задачи выполняется также для центров сфер S_i, $i = 2,3,4$.

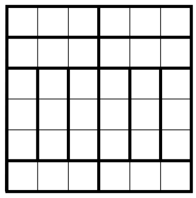
6. *Дано натуральное число $n > 1$. Что больше: количество способов разрезать клетчатый квадрат $3n\times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или количество способов разрезать клетчатый квадрат $2n\times 2n$ на клетчатые прямоугольники 1×2?*

Ответ. Больше число разбиений на триминошки.

Решение. Дадим конструкцию отображения, каждому разбиению доски $2n \times 2n$ на доминошки сопоставляющего разбиение доски $3n \times 3n$ на триминошки.

Предположим, что задано некоторое разбиение доски $2n\times 2n$ на доминошки. Пронумеруем все вертикали числами от 1 до $2n$ и все горизонтали числами от 1 до $2n$. Сделает n горизонтальных разрезов через горизонтали с четным номером и n вертикальных разрезов через вертикали с четным номером. Получится доска $3n\times 3n$ (правда, разбитая на неравные клетки, но ничего страшного), далее её будем называть новой доской. Каждая отдельная клетка старой доски стала либо одной, либо двумя, либо четырьмя клетками новой (если соответственно нуль, одна или обе координаты старой клетки были четными числами). Доминошки после этой операции становятся либо триминошками, либо прямоугольниками 2×3. Так вот, разрежем каждый из этих прямоугольников 2×3 на две триминошки. Получим, наконец, некоторое разбиение доски $3n \times 3n$ на триминошки.

Докажем, что при этом из разных разбиений на доминошки получаются разные разбиения на триминошки. Предположим противное: пусть два различных разрезания на доминошки доски $2n\times 2n$ при построенном отображении становятся одним разрезанием на триминошки доски $3n \times 3n$. Поскольку разрезания на доминошки различны, существует клетка A доски $2n\times 2n$, накрытая в этих разрезаниях доминошками по-разному. Но тогда после нашей операции то, во что превратится клетка A, т.е. 1, 2, или 4 клеточки, будет накрыто триминошками по-разному. Значит, и разрезания на триминошки разные, что противоречит предположению.



Тем самым, мы доказали, что разрезаний на триминошки не меньше, чем разрезаний на доминошки. Осталось предъявить хотя бы одно разрезание $3n \times 3n$ на триминошки, которое не получается из разрезания $2n \times 2n$ на доминошки. Проверьте, что подойдет любое разбиение на триминошки, в котором к правому нижнему углу, (т.е. образованному последними строкой и столбцом), примыкает горизонтальная триминошка, а на ней стоят три вертикальные (пример см. на рисунке справа).