Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2019-2020
ФИЗИКА

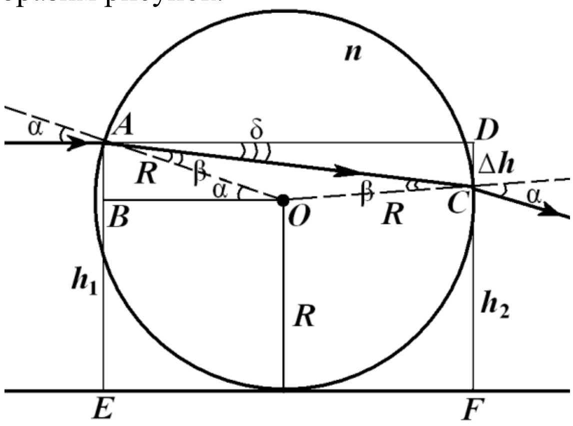
11 класс

II этап

1. На горизонтальной плоскости лежит стеклянный шар радиуса $\boldsymbol{R}$ = 0,1 м. Тонкий луч света падает на шар параллельно горизонтальной плоскости на высоте $\boldsymbol{h}_1$ = 0,14 м. Показатель преломления стекла $\boldsymbol{n}$ = 1,5. Определите в градусах угол преломления луча в шаре.
Оценка задания № 1 – 10 баллов

Решение

Изобразим рисунок.



(2 балла)

1) Определим угол падения луча на поверхность шара как функцию высоты точки падения. Из рассмотрения треугольника *ABO*:

$$h_1 = R + R\sin\alpha = R(1+\sin\alpha);\ \sin\alpha = \frac{h_1}{R} - 1.$$ **(2 балла)**

2) Из закона преломления: $\sin\alpha = n\cdot\sin\beta$; $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n} = \dfrac{h_1 - R}{n\cdot R}$ **(2 балла)**

$$\beta = \arcsin\left(\frac{h_1 - R}{n\cdot R}\right);$$ **(2 балла)**

$$\boxed{\beta = \arcsin\left(\frac{h_1 - R}{n\cdot R}\right) = 15{,}47^\circ}$$ **(2 балла)**

Ответ: $\boxed{\beta = \arcsin\left(\frac{h_1 - R}{n\cdot R}\right) = 15{,}47^\circ}$

2. В вертикальном теплоизолированном цилиндрическом сосуде объемом 2 л с подвижным тяжелым поршнем массой 10 кг и площадью 20 см^2 находится гелий. Его начальное давление 10 кПа, начальная температура 300 К. наружное атмосферное давление отсутствует. Поршень удерживают на самом верху сосуда, в некоторый момент его отпускают, и он начинает падать. Сначала он разгоняется за счет силы тяжести, потом тормозится за счет повышения давления гелия. Найдите значения объема и температуры гелия в тот момент, когда поршень будет замедлять свое движение с ускорением, вдвое меньшим начального.
Оценка задания № 2 –15 баллов

Решение

а) Определение начального ускорения

Согласно второму закону Ньютона в момент отпускания поршня

$$ma_0 = mg - P_0S \Rightarrow a_0 = g - \frac{P_0S}{m} = 10 - \frac{10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{10} = 8\,\frac{м}{с^2}$$ **(2 балла)**

б) Определение давления газа в указанный момент времени.

Согласно условию задачи, ускорение поршня в этот момент $a = \frac{a_0}{2} = 4\,\frac{м}{с^2}$ и направлено вверх. Поэтому согласно второму закону Ньютона

$$ma = PS - mg \Rightarrow 10 \cdot 4 = P \cdot 2 \cdot 10^{-3} - 10 \cdot 10 \Rightarrow P = \frac{140}{2 \cdot 10^{-3}} = 70 \cdot 10^3\ Па = 7 \cdot 10^4\ Па$$ **(2 балла)**

в) Определение отношения объема к температуре в указанный момент времени.

Согласно уравнению Клапейрона

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T} \Rightarrow \frac{10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{300} = \frac{7 \cdot 10^4 \cdot V}{T}.$$ Отсюда $\frac{V}{T} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2100}$ **(2 балла)**

г) По условию задачи, процесс в цилиндре – адиабатный.

Согласно первому закону термодинамики, в этом случае вся работа, которую совершит сила тяжести при опускании поршня, пойдет на изменение внутренней энергии газа. Формула для работы силы тяжести благодаря цилиндрической форме сосуда может быть записана так:

$$A = mgh = mg\frac{V_0 - V}{S}$$ **(2 балла)**

Тогда согласно первому закону термодинамики, формуле для внутренней энергии идеального одноатомного газа и уравнению Менделеева – Клапейрона

$$mg\frac{V_0 - V}{S} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\left(PV - P_0V_0\right)$$ **(2 балла)**

Подстановка в это выражение исходных данных задачи и вычисленного значения давления приводит к уравнению для определения объема газа:

$$10 \cdot 10 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} - 10 \cdot 10 \cdot \frac{V}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{3}{2} \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot V - \frac{3}{2} \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}$$ **(2 балла)**

Его решение выглядит так:

$$130 = V\frac{2{,}1 + 1}{2} \cdot 10^5 = V \cdot \frac{3{,}1 \cdot 10^5}{2};$$

$$V = \frac{260}{3{,}1 \cdot 10^5} = \frac{260}{310} \cdot 10^{-3}\left(м^3\right) = 0{,}84 \cdot 10^{-3}\left(м^3\right) = 0{,}84\left(л\right)$$ **(2 балла)**

д) Температура определяется из уже найденного значения отношения объема к температуре

$$\frac{0{,}84 \cdot 10^{-3}}{T} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2100} \Rightarrow T = \frac{0{,}84 \cdot 2100}{2} = 882\left(K\right)$$ **(1 балл)**

Ответ: объем гелия 0,84 л, его температура 882 К

3. Пуля массы ***m*** летит с некоторой скоростью ***v***. На её пути находится покоящийся шар массой ***M***, выполненный из того же материала, что и пуля. Происходит лобовое столкновение и пуля застревает в шаре. Определите, какое должно быть отношение массы пули и массы шара, чтобы в результате столкновения их температуры увеличились максимально.

Оценка задания № 3 –15 баллов

Решение

Запишем законы сохранения импульса и полной энергии системы «пуля-шар»:

$$mv = (m + M)v', \qquad (1)$$ **(1 балл)**

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m+M)v'^2}{2} + Q, \qquad (2) \qquad \textbf{(1 балл)}$$

где $Q = C_{уд}(m+M)(T-T_0)$ – количество тепла выделившегося при деформации пули и шара. (3)

(2 балла)

T – конечная температура системы «пуля-шар».

Выразив из (1) v', подставив v' и (3) в (2), выразим конечную температуру:

$$v' = \frac{m}{(m+M)} v,$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m+M)}{2} \frac{m^2}{(m+M)^2} v^2 + C_{уд}(m+M)(T-T_0),$$

$$C_{уд}(m+M)(T-T_0) = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2}{2}\frac{m}{(m+M)} = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{m+M-m}{m+M}\right) = \frac{mv^2}{2}\left(\frac{M}{m+M}\right)$$

$$T - T_0 = \frac{v^2}{2C_{уд}}\left(\frac{mM}{(m+M)^2}\right), \qquad T = T_0 + \frac{v^2}{2C_{уд}}\left(\frac{mM}{(m+M)^2}\right). \qquad \textbf{(4 балла)}$$

Преобразуем скобку. Раскроем квадрат в знаменателе и поделим на произведение масс. Обозначим $x = m/M$.

$$T = T_0 + \frac{v^2}{2C_{уд}}\left(\frac{1}{\frac{m}{M} + 2 + \frac{M}{m}}\right) = T_0 + \frac{v^2}{2C_{уд}}\left(\frac{1}{x + 2 + \frac{1}{x}}\right). \qquad \textbf{(2 балла)}$$

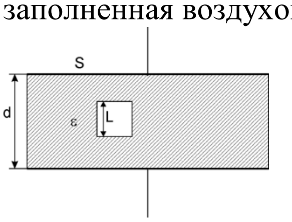
Проанализируем полученное выражение. Для того, чтобы температура была максимальной, необходимо, чтобы максимальным было второе слагаемое. Так как скорость и удельная теплоёмкость – постоянные величины, то необходимо, чтобы максимальной была скобка. Для этого нужно, чтобы знаменатель в скобке был минимальным. Найдём экстремум выражения, приравняв производную нулю:

$$\left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)' = 0, \qquad 1 - \frac{1}{x^2} = 0, \qquad x^2 = 1, \qquad \textbf{(4 балла)}$$

$$x = \frac{m}{M} = 1. \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Ответ: $m = M$

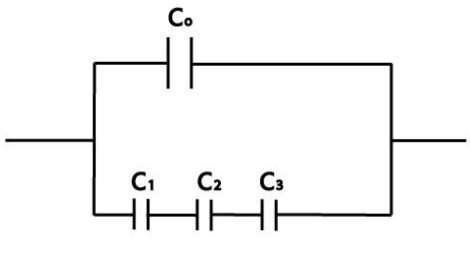
4. В плоском конденсаторе с площадью пластин $\boldsymbol{S}$ и расстоянием между ними $\boldsymbol{d}$, заполненном диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\boldsymbol{\varepsilon}$, находится емкость кубической формы, заполненная воздухом, с длиной стороны $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{L}$<$\boldsymbol{d}$) (см. рисунок). Найти емкость конденсатора.



Оценка задания № 4 – 30 баллов

Решение

Если перерисовать конденсатор, как показано на рисунке, выделив его часть, включающую полость то можно заменить его эквивалентной схемой:



где C_1 – емкость части конденсатора над полостью, C_2 – емкость полости, C_3 – емкость части конденсатора под полостью, C_0 – емкость оставшейся части конденсатора за пределами выделенной области. **(6 баллов)**

Известная формула для емкости плоского конденсатора имеет вид: $C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$, где ε_0 – электрическая постоянная, ε - диэлектрическая проницаемость диэлектрика между обкладками, S – площадь обкладок, d – расстояние между обкладками. **(2 балла)**

На основании формулы можно определить емкости в схеме

а) $C_0=\frac{\varepsilon_0\varepsilon\left(S-L^2\right)}{d}$ (площадь уменьшилась за счет выделенной области) **(4 балла)**

б) $C_2=\frac{\varepsilon_0 L^2}{L}=\varepsilon_0 L$ (диэлектрическая проницаемость воздуха равна 1) **(4 балла)**

в) $C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon L^2}{d_1}$ - емкость области над полостью, d_1 – толщина диэлектрика в ней, $C_3=\frac{\varepsilon_0\varepsilon L^2}{d_2}$ - емкость области под полостью, d_2 – толщина диэлектрика в ней.

Из рисунка видно, что $d_1 + d_2 = d - L$ **(4 балла)**

Таким образом, нижняя ветка схемы имеет ёмкость:

$$\frac{1}{C'}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}=\frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon L^2}+\frac{1}{\varepsilon_0 L}+\frac{d_2}{\varepsilon_0\varepsilon L^2}=\frac{d_1+d_2}{\varepsilon_0\varepsilon L^2}+\frac{1}{\varepsilon_0 L}=\frac{d-L}{\varepsilon_0\varepsilon L^2}+\frac{1}{\varepsilon_0 L}=\frac{d-L+\varepsilon L}{\varepsilon_0\varepsilon L^2}\Rightarrow C'=\frac{\varepsilon_0\varepsilon L^2}{d-L\left(1-\varepsilon\right)}$$

(6 баллов)

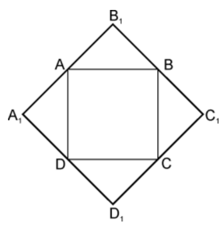
Тогда полная ёмкость:

$$C=C_0+C'=\frac{\varepsilon_0\varepsilon\left(S-L^2\right)}{d}+\frac{\varepsilon_0\varepsilon L^2}{d-L\left(1-\varepsilon\right)}=\varepsilon_0\varepsilon\left[\frac{S-L^2}{d}+\frac{L^2}{d-L\left(1-\varepsilon\right)}\right]$$ **(4 балла)**

Ответ:

$$C=C_0+C'=\frac{\varepsilon_0\varepsilon\left(S-L^2\right)}{d}+\frac{\varepsilon_0\varepsilon L^2}{d-L\left(1-\varepsilon\right)}=\varepsilon_0\varepsilon\left[\frac{S-L^2}{d}+\frac{L^2}{d-L\left(1-\varepsilon\right)}\right]$$

5. Из проволоки спаяли квадрат ABCD и измерили сопротивление между точками A и B. После этого взяли проволоку из того же материала, но с другим диаметром. Из второй проволоки сделали квадрат $A_1B_1C_1D_1$ и припаяли его к первому так, как показано на рисунке. При измерении сопротивления получившейся конструкции между точками A_1 и B_1 оказалось, что результаты двух измерений совпали. Определить отношение площадей поперечного сечения двух проволок.



Оценка задания № 5 – 30 баллов

Решение

1. Введём обозначения:

а) Сопротивление стороны исходного квадрата обозначим r;

б) Сопротивление половины стороны добавленного квадрата обозначим R. (см. рисунок 1)

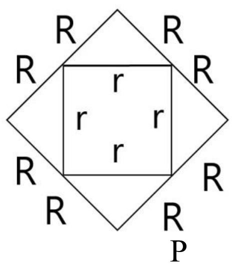
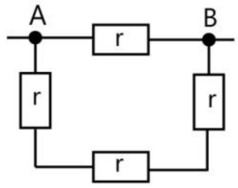


Рисунок 1

(1 балл)

2. Эквивалентная схема исходного квадрата до пайки с учетом введенных обозначений (необходима для вычисления исходного сопротивления)

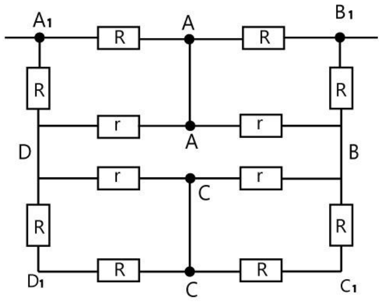


(2 балла)

Сопротивление этой схемы легко определяется:

$$R_{AB} = \frac{r \cdot 3r}{r + 3r} = \frac{3r}{4}$$ **(2 балла)**

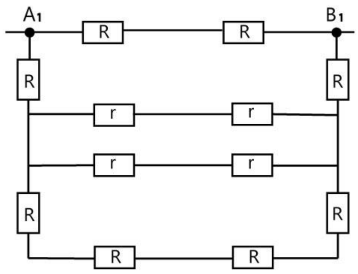
3. Эквивалентная схема составного квадрата после пайки с учетом введенных обозначений выглядит так:



(4 балла)

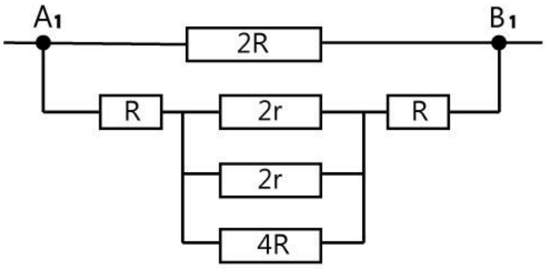
Для определения сопротивления этой цепи нужно использовать то обстоятельство, что в силу полной симметрии схемы ток по линиям АА и СС не пойдет, на сопротивление схемы они не повлияют, а значит, их можно убрать. **(2 балла)**

При этом схема станет такой:



(4 балла)

Элементарное упрощение схемы приводит ее к виду:



(4 балла)

4. Определение сопротивления этой цепи проводится в 3 этапа:

а) $\frac{1}{R_1}=\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r}+\frac{1}{4R}=\frac{2R+2R+r}{4Rr}=\frac{4R+r}{4Rr}=>R_1=\frac{4Rr}{4R+r}$ **(2 балла)**

б) $R_2=2R+R_1=2R+\frac{4Rr}{4R+r}=\frac{8R^2+6Rr}{4R+r}=\frac{2R(4R+3r)}{4R+r}$ **(2 балла)**

в) $\frac{1}{R_{A_1B_1}}=\frac{1}{2R}+\frac{4R+r}{2R(4R+3r)}=\frac{4R+3r+4R+r}{2R(4R+3r)}=\frac{8R+4r}{2R(4R+3r)}=\frac{2(2R+r)}{R(4R+3r)}$

$\Rightarrow R_{A_1B_1}=\frac{R(4R+3r)}{2(2R+r)}$ **(2 балла)**

5. По условию задачи

$R_{AB}=R_{A_1B_1}$

Поэтому

$\frac{3r}{4}=\frac{R(4R+3r)}{2(2R+r)}\Rightarrow 6Rr+3r^2=8R^2+6Rr\Rightarrow R^2=\frac{3}{8}r^2\Rightarrow R=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}r$ **(2 балла)**

7. Обозначим длину части квадрата с сопротивлением R через a, тогда длина стороны исходного квадрата с сопротивлением r будет $a\sqrt{2}$ (рисунок 1). Пусть площадь поперечного сечения проволоки исходного квадрата будет S, а площадь поперечного сечения проволоки добавленного квадрата будет S_1. Тогда по формуле для подсчета сопротивления получается:

$$R=\rho\frac{a}{S_1};r=\rho\frac{a\sqrt{2}}{S}=>\rho\frac{a}{S_1}=\rho\frac{a\sqrt{2}}{S}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=>\frac{1}{S_1}=\frac{\sqrt{3}}{2S}=>\frac{S}{S_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}=>\frac{S_1}{S}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

(3 балла)

Ответ:

$\frac{S_1}{S}=\frac{2}{\sqrt{3}}$