Южно-Уральская олимпиада школьников по математике
9-10 классы
19 февраля 2012 г.

1. За 18 дней брусок мыла уменьшился на 50% по высоте, на 30% по длине и на 20% по ширине. На сколько ещё дней его хватит, если каждый день расходуется один и тот же объём мыла?

Ответ: на 7 дней.

Решение. За 18 дней от бруска мыла останется $0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 100\% = 28\%$. Значит, всего израсходуется 72%, а за один день тратится 4% от исходного бруска. Отсюда и получается ответ.

Оценивание. Верное решение — 10 б.

2. Два велосипедиста в полдень выехали навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через час. Прибыв в B и A соответственно, они сразу же повернули назад, после чего встретились вновь. Когда это произошло? (Каждый из велосипедистов двигался со своей постоянной скоростью).

Ответ: в 15.00.

Решение. Пусть расстояние между пунктами равно s, тогда к моменту первой встречи велосипедисты совместно проехали расстояние s, а к моменту второй встречи — расстояние $3s$. Поэтому промежуток времени от полдня до второй встречи втрое длиннее промежутка времени от полдня до первой встречи.

Оценивание. Верное решение — 11 б.

3. Отличница Аня вычислила произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 30 \cdot 31$ и записала результат на доске. Хулиган Вася стёр две цифры. Получилась запись (в ней стёртые цифры заменены звёздочками): $822283865417{*}92281772556288{*}000000$. Восстановите эти цифры.

Ответ: 7 и 0.

Решение. Поскольку в числе 31! есть множители 5, 10, 15, 20, 25 и 30, это число делится на 5^7. Легко видеть, что оно делится и на 2^7. Значит, наше число делится на 10^7 и оканчивается на 7 нулей. Итак, вторая из стёртых цифр — ноль. Оставшуюся стёртую цифру можно найти, используя признак делимости на 9 (или на 11).

Оценивание. Верное решение — 12 б.

Если найден только ноль — 6 б.

Если найден ноль и использован признак делимости на 9 (или 11), но в результате арифметических ошибок получена неверная вторая цифра, то 9 б.

Если сформулирован признак делимости на 9, и найдена сумма стёртых цифр, то 3 б.

Если кто-то из участников непосредственно вычислит 31!, приведя вычисления в работе, и нигде не ошибётся, то за такой подвиг он также заслуживает 12 б.

4. Имеется 10 гирь. Известно, что суммарный вес любых четырёх гирь больше суммарного веса любых трёх из оставшихся гирь. Верно ли, что суммарный вес любых трёх гирь больше суммарного веса любых двух из оставшихся гирь?

Ответ: верно.

Решение. Пусть веса гирь $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{10}$. По условию,

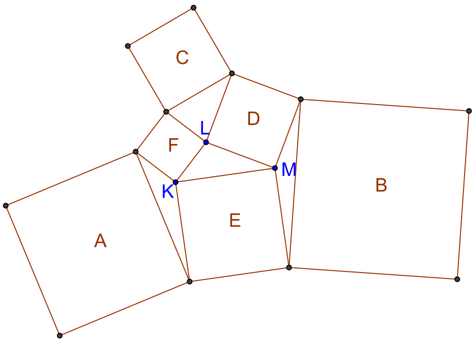
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > x_8 + x_9 + x_{10}. \qquad (1)$$

Докажем, что $x_1 + x_2 + x_3 > x_9 + x_{10}$. Действительно, если это не так, т. е. $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant x_9 + x_{10}$, то сложив это неравенство с неравенством $x_4 \leqslant x_8$, получим противоречие с неравенством (1).

Итак, суммарный вес трёх самых лёгких гирь больше суммарного веса двух самых тяжёлых гирь. Значит, суммарный вес любых трёх гирь больше суммарного веса любых двух из оставшихся гирь.

Оценивание. Верное решение — 13 б.

5. По произвольному треугольнику KLM построили шесть квадратов (A, B, C, D, E, F) так, как показано на рис.



Докажите, что сумма площадей квадратов A, B и C в три раза больше суммы площадей квадратов D, E и F.

Решение. Пусть стороны квадратов A, B, C, D, E, F равны соответственно a, b, c, d, e, f; $\angle LKM = \alpha$, $\angle KML = \beta$, $\angle MLK = \gamma$.

Применим теорему косинусов ко всем треугольникам на рис., причём к треугольнику KLM трижды (при этом учитываем, что $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$):

$$a^2 = f^2 + e^2 + 2fe\cos\alpha, \quad b^2 = e^2 + d^2 + 2ed\cos\beta, \quad c^2 = d^2 + f^2 + 2df\cos\gamma,$$

$$d^2 = f^2 + e^2 - 2fe\cos\alpha, \quad f^2 = e^2 + d^2 - 2ed\cos\beta, \quad e^2 = d^2 + f^2 - 2df\cos\gamma.$$

После сложения шести равенств и очевидных преобразований получим

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3(d^2 + e^2 + f^2),$$

что и требовалось доказать.

Оценивание. Верное решение — 14 б.

6. Решите неравенство $(x-4)^8+(x-2)^8 \leqslant 256$.
Ответ: $[2;4]$.
Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\left(\frac{x-4}{2}\right)^8+\left(\frac{x-2}{2}\right)^8 \leqslant 1. \tag{1}$$

Из (1) следует, что

$$\left|\frac{x-4}{2}\right| \leqslant 1; \quad \left|\frac{x-2}{2}\right| \leqslant 1. \tag{2}$$

Решив совместно эти неравенства, получим

$$2 \leqslant x \leqslant 4. \tag{3}$$

Итак, условие (3) необходимо для выполнения неравенства (1). Покажем, что оно и достаточно. Действительно, в силу (2) и (3) имеем цепочку неравенств

$$\left(\frac{x-4}{2}\right)^8+\left(\frac{x-2}{2}\right)^8 \leqslant \left|\frac{x-4}{2}\right|+\left|\frac{x-2}{2}\right| = \frac{4-x}{2}+\frac{x-2}{2}=1.$$

Можно было также решать задачу, исследуя (с помощью производной) функцию $f(x)=(x-4)^8+(x-2)^8$.

Оценивание. Верное решение — 13 б. Если лишь показано, что неравенство не выполняется вне отрезка $[2;4]$, то 3 б.

7. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy=2x-y+1; \\ yz=2y-z+1; \\ zx=2z-x+1. \end{cases}$

Ответ: $x=y=z=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Из первого уравнения системы получаем $y=2-\dfrac{1}{x+1}$. Введём функцию $f(x)=2-\dfrac{1}{x+1}$. Тогда $y=f(x)$. Аналогично из 2-го и 3-го уравнений системы получаем $z=f(y)$ и $x=f(z)$. Заметим, что $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$. Если $x<-1$, то $y=f(x)>2$, $z=f(y)>f(2)=\frac{5}{3}$ и $x=f(z)>f(\frac{5}{3})>0$, что приводит к противоречию.

Итак, $x>-1$. Система не меняется при циклической перестановке переменных, поэтому справедливы также неравенства $y>-1$ и $z>-1$. Теперь из условий $y=f(x)$, $z=f(y)$, $x=f(z)$, где $f(x)$ — возрастающая функция на промежутке $(-1;+\infty)$, легко получить, что $x=y=z$. Действительно, если $x>y$, то $y=f(x)>f(y)=z$ и $z=f(y)>f(z)=x$ — получилась противоречивая цепочка неравенств $x>y>z>x$. Предположение $x<y$ приводит к противоречивым неравенствам $x<y<z<x$. Таким образом, в силу системы

уравнений имеем $x = y$, откуда также вытекает $z = f(y) = f(x) = y$. В итоге получаем $x = f(x)$,

$$x = 2 - \frac{1}{x+1}; \quad x^2 - x - 1 = 0; x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

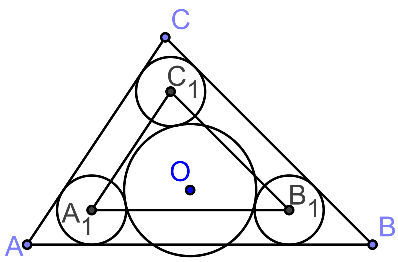
Замечание. Есть и более прозаичное решение, когда из первого уравнения выражаем y через x, затем из второго z через x. После подстановки найденного выражения z через x в третье уравнение получится уравнение относительно x.

Оценивание. Верное решение — 13 б.

8. Три окружности радиусом a вписаны в углы треугольника ABC и касаются внешним образом одной и той же окружности радиусом b. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC, если радиус вписанной в него окружности равен r.

Ответ: $\dfrac{(a+b)r}{r-a}$.

Решение. Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$ с вершинами в центрах трёх окружностей.



Он подобен треугольнику ABC (так как их стороны соответственно параллельны), а центры вписанных в них окружностей совпадают (поскольку расстояния между параллельными сторонами этих треугольников равны одной и той же величине a, и точка, равноудалённая от сторон ABC, будет находиться на одинаковых расстояниях и от сторон $A_1B_1C_1$). Радиус вписанной в $A_1B_1C_1$ окружности равен $r - a$, а описанной — $a + b$ (центр O окружности радиусом b находится на расстоянии $a + b$ от вершин треугольник $A_1B_1C_1$). Из подобия имеем: $\dfrac{R}{a+b} = \dfrac{r}{r-a}$, где R — искомый радиус описанной окружности.

Оценивание. Верное решение — 14 б.