Южно-Уральская олимпиада школьников по математике

6-8 классы

19 февраля 2012 г.

1. После каждой стирки кусок мыла уменьшается на 20%. После скольких стирок он впервые уменьшится не меньше чем на треть от первоначальной величины?

Ответ: после двух.

Решение. После двух стирок останется $0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64 < \dfrac{2}{3}$ от начального куска.

Оценивание. Верное решение — 10 б.

2. Расставьте скобки в выражении $2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5$ так, чтобы получилось верное равенство.

Решение. $(2 : 3) : ((4 : 5) : 6) = 5$.

Оценивание. Верное решение — 11 б.

3. При делении числа 2012 на натуральное число n в остатке получилось 212. Чему равно n? (Укажите все варианты).

Ответ: 1800, 900, 600, 450, 360, 300, 225.

Решение. Имеем равенство $2012 = nq+212$, где $212 < n$. Отсюда $nq = 1800$, $q < \frac{1800}{212} < 9$. Выпишем все делители числа 1800, меньшие 9: $q = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$. Отсюда и находим n.

Оценивание. Верное решение — 11 б. Если подбором найдено несколько значений n и не доказано, что других нет, то выставляется $\min(k, 4)$ баллов, где k — количество угаданных решений. Если ход решения верный, но пропущены некоторые делители числа 1800, то за каждое пропущенное решение минус 1 балл.

4. Лягушка прыгает вдоль числовой прямой, начиная с точки нуль. Каждую секунду она перемещается на n единиц вправо (n — фиксированное натуральное число). Спустя секунду после начала движения лягушки Вы начинаете её ловить. Лягушку не видно, число n неизвестно. Можно лишь каждую секунду проверять любую точку. Если в данный момент лягушка находится в проверяемой точке, то она поймана. Если нет, через секунду можно повторить попытку. Как поймать лягушку?

Решение. Через секунду после начала движения проверим точку 1. Если лягушки там нет, то $n > 1$. Если $n = 2$, то через две секунды лягушка окажется в точке 4. Вообще, в момент времени $t = k$, где k — натуральное число, будем проверять точку k^2, в которой должна быть лягушка, если $n = k$. В результате лягушка будет поймана ровно через n секунд после начала её движения вдоль числовой прямой.

Оценивание. Верное решение — 12 б.

5. На вечеринке было 26 гостей, 14 из них всегда говорят правду («правдецы»), а остальные 12 всегда лгут («лжецы»). Вокруг круглого стола уселись $n \geqslant 3$ гостей, каждый из них заявил: «Ровно один из двух моих соседей — лжец». При каких n это возможно?

Ответ: $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 21$.

Решение. Во-первых, возможен случай, когда за столом одни лжецы; при этом $n \leqslant 12$.

Пусть теперь за столом есть хотя бы один рыцарь (по старинной традиции, правдецов будем называть рыцарями). Пусть это рыцарь A. Его соседи — рыцарь B и лжец C. Тогда с другой стороны от B сидит лжец, а с другой стороны от C — рыцарь. Продолжая эти рассуждения, получаем, что сидящие за столом разбиваются на непересекающиеся тройки, в каждой из которых по два рыцаря и одному лжецу. Поэтому $n = 3k$, и за столом k лжецов и $2k$ рыцарей. Из условий $k \leqslant 12$ и $2k \leqslant 14$ следует, что $k \leqslant 7$. Таким образом, добавляются возможные значения 15, 18, 21.

Оценивание. Верное решение — 13 б.

Если рассмотрен только случай, когда за столом одни лжецы — 3 б.

Если верно рассмотрен только случай, когда за столом есть хотя бы один рыцарь — 8 б.

За постороннее решение $n = 24$ снять 3 балла.

6. Группа туристов совершила 3,5-часовую прогулку. Известно, что за любой промежуток времени в 1 час она преодолела ровно 4 км. Какой при этом может быть наибольшая и наименьшая длина всего маршрута?

Ответ: 16 км и 12 км.

Решение. Пусть за первые полчаса туристы прошли x км. Очевидно, $0 \leqslant x \leqslant 4$. За последующие три часа они пройдут ровно 12 км. Общий путь составит $x + 12$ км. Значит, пройденный путь не меньше 12 км и не больше 16 км. Это **оценка.**

Покажем, что туристы могли пройти ровно 12 км. Первые полчаса они отдыхают. Пусть следующие полчаса они идут (скорее, бегут) с постоянной скоростью $v = 8$ км/ч, далее полчаса они вынуждены отдыхать (чтобы было выполнено условие задачи), затем вновь полчаса двигаются со скоростью v и т. д. При таком режиме движения какой бы промежуток времени длиной час мы ни взяли, он будет содержать в общей сложности полчаса отдыха и полчаса движения со скоростью v, поэтому в течение этого часа будет пройдено ровно 4 км.

Аналогично строится пример пути в 16 км. Здесь туристы первые полчаса двигаются со скоростью v, затем полчаса отдыхают и т. д.

Оценивание. Верное решение — 14 б.

Только оценка — 5 б.

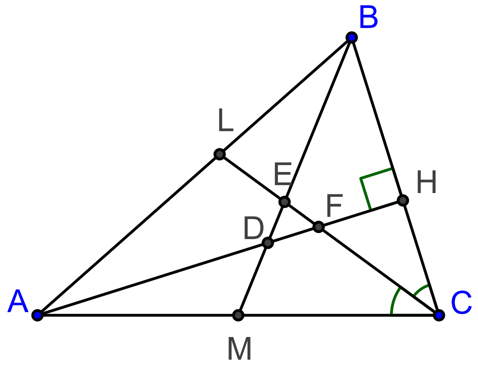
Примеры (обоснованные) без оценки — 9 б.

Если в решении лишь указано, что чередуются получасовые участки ходьбы и отдыха, но не указано, как именно двигаются туристы, то такой пример не засчитывать! Если указано, что на участках ходьбы скорость постоянная, но рассматриваются часовые промежутки только с получасовыми границами, то за такой пример 4 б.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH, медиана BM и биссектриса CL. Точки пересечения этих отрезков являются вершинами треугольника DEF. Может ли треугольник DEF быть правильным?

Ответ: нет.

Решение. Пусть треугольник DEF правильный.



Тогда $\angle DFE = 60°$. Отсюда $\angle HFC = 60°$ и из прямоугольного треугольника FCH получаем, что $\angle HCF = 30°$. Так как CF — биссектриса угла C, $\angle MCB = 60°$. С другой стороны, из прямоугольного треугольника DBH, в котором $BDH = 60°$ получаем $\angle DBH = 30°$. Но тогда в треугольнике MBC углы при вершинах B и C равны соответственно $30°$ и $60°$. Значит, $\angle BMC = 90°$. Медиана BM оказалась и высотой. Получили равнобедренный треугольник ABC с углом при основании в $60°$. Это — равносторонний треугольник. В нём указанные в условии отрезки пересекаются в одной точке.

При другом взаимном расположении точек D, E и F рассуждение вполне аналогично.

Оценивание. Верное решение — 14 б.

8. Имеется несколько кошельков, в каждом из которых по 20 пятикопеечных монет. Все монеты по виду одинаковые, но в одном кошельке все монеты на 1 г легче настоящих, а в другом — на 1 г тяжелее. Масса настоящей монеты известна. За одно взвешивание на электронных весах требуется определить, в каких кошельках какие монеты. При каком наибольшем количестве кошельков это возможно?

Ответ: 6.

Решение. Очевидно, не должно быть двух кошельков, из которых для взвешивания отбирают по одинаковому количеству монет (иначе мы не сможем эти кошельки отличить друг от друга). Пусть из тяжёлого кошелька берётся k монет, а из лёгкого m монет. С помощью взвешивания мы найдём $k - m$ (это разность между показаниями весов и теми показаниями, которые были бы в случае, когда все взвешиваемые монеты настоящие). Возможные значения этой разности: $\pm1, \pm2, \ldots, \pm20$ — всего 40 различных исходов.

Если кошельков не менее 7, то вариантов распределения тяжёлого и лёгкого кошельков не менее $7 \cdot 6 = 42$. Значит, для каких-то вариантов исходы взвешивания должны совпасть, и мы не сможем выполнить требование задачи. Поэтому кошельков может быть не более 6.

Если кошельков ровно 6, возьмём из них соответственно 0, 1, 3, 7, 12, 20 монет. (Другой вариант: 1, 2, 4, 9, 13, 19). Легко проверить, что попарные разности выписанных шести чисел не повторяются. Поэтому, зная разность $k - m$ (которая вычисляется как разность между показаниями весов и произведением массы настоящей монеты и количества монет на чашке весов), мы однозначно определим числа k и m, а значит, и кошельки с тяжёлыми и лёгкими монетами (поскольку мы знаем, из какого кошелька было взято сколько монет).

Оценивание. Верное решение — 15 б.

За верный пример (без оценки) — 7 б.

За оценку (без верного примера) — 7 б.