Материалы заданий олимпиады

1. Иван Петрович каждый день в одно и то же время выезжает на своём автомобиле на работу. Если он едет со средней скоростью 40 км/ч, то он прибывает на работу в 8 ч 03 мин. Если его средняя скорость 60 км/ч, то он приезжает в 7 ч 57 мин. С какой средней скоростью нужно ехать Ивану Петровичу, чтобы прибыть на работу ровно в 8 ч?

Ответ: 48 км/ч.

Решение. Пусть t — время (в ч), которое потребуется Ивану Петровичу, чтобы прибыть на работу ровно в 8.00, а s — расстояние (в км) от его дома до его работы. Тогда

$$s = 40\left(t + \frac{1}{20}\right) = 60\left(t - \frac{1}{20}\right),$$

откуда $20t = 5$, $t = \frac{1}{4}$, $s = 12$, $v = \frac{s}{t} = 48$.

2. Решить уравнение

$$(x-2)\log_3(x^2) = 2|x-2|.$$

Ответ: $\pm\frac{1}{3}; 2; 3$.

Решение. Очевидно, 2 — корень уравнения.

Если $x > 2$, то $\log_3(x^2) = 2$, откуда $x = 3$.

Если $x < 2$, то $\log_3(x^2) = -2$, откуда $x = \pm\frac{1}{3}$.

3. Магазин открылся в 8.00. Каждую минуту в магазин либо один покупатель входит, либо двое выходят. Может ли в 11.00 в магазине находится ровно 91 покупателей?

Ответ: нет.

Решение. Пусть в течение x мин в магазин входило по одному покупателю. Тогда в течение $180 - x$ мин выходило по два покупателя. Если в 11.00 в магазине 91 покупателей, то

$$91 = x - 2(180 - x),$$

откуда $3x = 451$, что невозможно при целом x.

4. Система

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2y \geqslant 3xy^2 - y^3; \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

задаёт на координатной плоскости Oxy отрезок. Найти его длину.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$(x+y)(x^2 - 4xy + y^2) \geqslant 0.$$

Учитывая, что $x + y = -1$, имеем

$$x^2 - 4xy + y^2 \leqslant 0, \quad x^2 + 4x(1+x) + (x+1)^2 \leqslant 0, \quad 6x^2 + 6x + 1 \leqslant 0,$$

откуда $\frac{-3-\sqrt{3}}{6} \leqslant x \leqslant \frac{-3+\sqrt{3}}{6}$. Значит, длина проекции отрезка на ось Ox равна $\frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Угловой коэффициент прямой $y + x + 1 = 0$, на которой лежит наш отрезок, равен -1. Поэтому острый угол между отрезком и осью Ox равен $45°$. Отсюда длина отрезка $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Другой вариант рассуждений: условие задачи симметрично относительно переменных x и y, в силу чего проекции отрезка на обе оси равны между собой.

Третий вариант решения: просто найти координаты точек пересечения прямой и квадратичного условия (пары прямых) и расстояние между этими точками.

5. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка E так, что

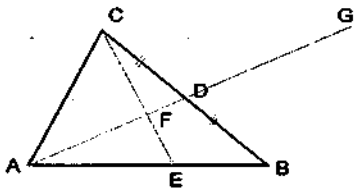
$$AE : EB = CF : FE = k,$$

где F — точка пересечения отрезка CE и медианы AD. Найти k.

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Первое решение. Воспользуемся методом масс. Разместим в вершинах треугольника такие массы, чтобы их центр масс был в точке F. Для этого необходимо и достаточно, чтобы центр масс, расположенных в точках A и B, был в точке E, а в точках C и B — в точке D. Поскольку $AE : EB = k$, масса в вершине B должна быть в k раз больше, чем в точке A. Пусть в т. A масса 1, тогда в т. B масса k, как и в т. C. Сгруппируем массы в точках A и B, заменив их массой величиной $k+1$ в т. E. Так как центр масс, расположенных в точках C и E есть т. F, имеем согласно правилу рычага $k^2 = k+1$, откуда и находится k.

Второе решение. Проведем CG параллельно AB. Очевидно $\Delta AFE \sim \Delta GFC$.



Отсюда:

$$k = \frac{CF}{FE} = \frac{CG}{AE} = \frac{AB}{AE} = \frac{k+1}{k},$$

откуда k удовлетворяет условиям

$$k^2 - k - 1 = 0, \quad k > 1 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

6. Имеется квадратное клетчатое поле 8×8, составленное из квадратов со стороной 1. В каждой клетке написано по числу. Если центры трёх клеток образуют треугольник с длинами сторон 3, 4 и 5, то числа, записанные в этих клетках, дают в сумме нуль. Следует ли отсюда, что во всех клетках записаны нули?

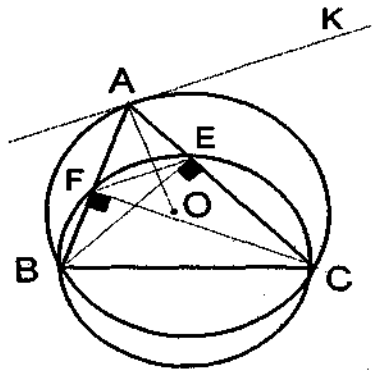
Ответ: да.

Решение. Рассмотрим четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника 4×3. Пусть в левой нижней клетке записано число x, в левой верхней — число y, в правой верхней — число z, в правой нижней — число t. Рассматривая треугольники, на которые указанный прямоугольник делится его диагоналями, получим четыре уравнения

$$x + y + z = x + t + z = y + x + t = y + z + t = 0,$$

из которых легко получить, что $x = y = z = t = 0$. Поскольку для каждой клетки поля найдётся прямоугольник нужного размера, вершиной которого является центр клетки, получаем, что нули будут во всех клетках.

7. В треугольной пирамиде $ABCD$ боковые рёбра DA, DB и DC равны по длине. Основание пирамиды — остроугольный треугольник ABC. В нём проведены высоты BE и CF. Доказать, что ребро DA перпендикулярно отрезку EF.



Доказательство. Пусть O — проекция вершины D на плоскость ABC. Из равенства боковых рёбер пирамиды следует, что O — центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды. По теореме о трёх перпендикулярах $DA \perp EF \iff OA \perp EF$.

Проведём касательную AK к окружности, описанной вокруг основания пирамиды. Угол между касательной AK и секущей AC равен вписанному углу ABC, опирающемуся на дугу окружности, заключённую между касательной и секущей.

В то же время, поскольку из точек E и F отрезок BC виден под прямым углом, четырёхугольник $BFEC$ является вписанным (в окружность с центром в середине отрезка BC). Отсюда заключаем, что $\angle FEB = \angle FCB = \frac{\pi}{2} - \angle ABC$. Поэтому $\angle FEA = \frac{\pi}{2} - \angle FEB = \angle ABC$. Из равенства внутренних накрест лежащих $\angle FEA = \angle KAE$ заключаем, что $AK \| FE$. Но $AK \perp AO$. Стало быть, и $FE \perp AO$, что и требовалось доказать.