Отборочный этап Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2012/2013 г.

9 класс

ЗАДАЧА № 1

«*Вокруг да около*»

Из проволоки сделан жесткий (недеформируемый) каркас в виде правильного 2012-угольника, который лежит на поверхности <u>*гладкого*</u> круглого стола. Центры стола и каркаса совпадают. Вершины каркаса пронумерованы по порядку от № 1 до № 2012. В центре стола просверлено круглое отверстие конечного диаметра, величина которого меньше диаметра вписанной в этот каркас окружности. Через это отверстие пропущены 2012 легких тонких гладких нитей. Каждая из них одним своим концом привязана к соответствующей вершине каркаса. Каркас удерживают в этом положении и затем к противоположным концам нитей (свисающим под столом) привязывают грузы, причем к вершине №1 привязывают груз массой $\boldsymbol{m}$, к вершине №2 – груз массой $2\boldsymbol{m}$, к вершине №3 – груз массой $3\boldsymbol{m}$ и т.д. по порядку, т.е., к вершине № n привязывают груз массой $n\boldsymbol{m}$. Найти равнодействующую всех сил, с которой подвешенные грузы действуют на каркас. Иными словами, требуется ответить на 2 вопроса:

1) Около вершины с каким № надо поставить упор, чтобы каркас не сдвинулся с места после того, как его отпустят?
2) С какой силой (F) каркас будет давить на этот упор?

Решение:

Снимем с каждой нити по одному грузу $\boldsymbol{m}$. В силу симметрии этой операции вектор равнодействующей всех сил ($\boldsymbol{F_o}$), очевидно, останется неизменным. Затем все снятые грузы (в количестве $2012\,\boldsymbol{m}$) подвесим на нить №1, которая после первой процедуры окажется пустой. В итоге мы получим картину, которая отличается от исходной только поворотом относительно центра на $1/2012$ часть полного оборота, т.е., на угол $\alpha = 360^o/2012 = 2\pi/2012$ радиан. Поворот происходит в сторону возрастания номеров. Действительно, теперь к вершине № n будет привязан груз массой $(n-1)\boldsymbol{m}$, и только к вершине № 1 будет привязан груз массой $2012\,\boldsymbol{m}$, который раньше висел на нити №2012. При этом вектор равнодействующей всех сил ($\boldsymbol{F_1}$) также повернется на этот угол в ту же сторону, оставшись неизменным по модулю. Но поворот этот мы получили, подвесив к вершине №1 груз $2012\,\boldsymbol{m}$, т.е., добавив к равнодействующей $\boldsymbol{F_o}$ силу $\boldsymbol{F}^*$, равную по модулю $F^*=2012\,mg$ и направленную из вершины №1 в центр и далее в вершину №1007 (1+ ½·2012):

$$\boldsymbol{F_1} = \boldsymbol{F_o} + \boldsymbol{F}^*.$$

Эти 3 вектора сил ($\boldsymbol{F_o}$, $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F}^*$) образуют равнобедренный треугольник с основанием $\boldsymbol{F}^*$ и углом при вершине $\alpha = 2\pi/2012$. Используя радианную меру этого угла и учитывая его малость, можно записать для сторон треугольника:

$$F^*/F_o = 2\pi/2012 \quad \rightarrow \quad 2012\,mg/F_o = 2\pi/2012,$$

откуда следует ответ на вопрос №2:

$$F_o = (2012)^2\,mg/2\pi.$$

Биссектриса (она же высота) этого треугольника перпендикулярна его основанию $\boldsymbol{F}^*$ и направлена по линии, проходящей через точки № 504 (1+ ¼·2012) и № 1510 (1+ ¾·2012). Значит, направления векторов $\boldsymbol{F_o}$ и $\boldsymbol{F_1}$, проходя через центр 2012-угольника, симметрично «охватывают» точку № 504 с обеих сторон с угловым смещением от нее на $\pm\alpha/2$. Соответственно, исходный вектор авнодействующей всех сил ($\boldsymbol{F_o}$) направлен посередине между точками № 503 и № 504. В исходном состоянии необходимо подпереть обе эти точки, симметрично поставив к ним общий упор снаружи 2012-угольника. Многугольник можно подпереть и изнутри, но в точках, диаметрально противоположных указанным , т.е. № 1509 и № 1510. Для полноты отметим, что вектор $\boldsymbol{F_1}$ направлен, соответственнпо, посередине между точками № 504 и № 505.

Для наглядности приведем другое решение вопроса о точках упора. Грузы, привязанные к любым двум диаметрально противоположным вершинам (с номереми n и n+1006) действуют на каркас с одной и той же (по модулю) силой F=1006 mg, направленной в каждой паре от центра «О» к вершине с меньшим номером. Количество таких пар равно 1006, а точки, в которые направлены эти силы $\boldsymbol{F}$, имеют номера от № 1 до

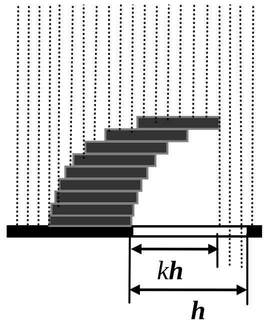
№ 1006. Вектор равнодействующей всех сил, в силу симметрии картины, будет, очевидно, направлен по биссектрисе центрального угла между этими крайними точками. Эта биссектриса нацелена в точку с номером ½·(1+1006) = 503,5, т.е., проходит симметрично между точками и № 503 и № 504.

ЗАДАЧА № 2

«*Навстречу всем ветрам*»

Сплошной (без просветов) забор сделан из жестких *гладких* тонких квадратных щитов размером $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$. В заборе оставлен достаточно большой проем (шириной $\boldsymbol{h} > 2\boldsymbol{a}$) для установки ворот. Створки ворот собираются делать из таких же щитов, которых осталось всего n штук.

Когда *перпендикулярно забору* подул сильный ветер, проем решили закрыть (хотя бы частично) от ветра этими щитами. Для этого их всех плотно прижали плоскостями друг к другу и затем, поставив эту пачку торцом на грунт, прислонили к забору в вертикальном положении. Далее щиты поочередно, начиная с наружного, стали по мере возможности сдвигать друг относительно друга вдоль забора, как это показано на рисунке (вид сверху). Пунктирные линии показывают направление воздушного потока. Какова максимальная часть (k_n) ширины проема, которую можно перекрыть подобным образом при помощи n щитов, не применяя никаких элементов крепления?



Толщиной щитов, их деформацией и трением их о грунт пренебречь. Считать, что сила давления ветра на щит пропорциональна площади открытой ветру поверхности.

Решение:

Пронумеруем щиты по порядку, начиная с наружного (верхнего на рисунке). Максимально возможный сдвиг щита № m относительно щита № (m+1) равен $a/2^m$. При таком способе сдвига суммарная открытая ветру площадь пачки из первых k щитов составляет $S_m = 2a^2\,[1-(½)^m]$. Равнодействующая сил ветровой нагрузки на эту пачку (F_m) приложена к геометрическому центру площадки S_m. Этот центр находится, очевидно, на расстоянии $L_m = S_m / 2a = a[1-(½)^m]$ от наружного (левого на рисунке) края щита № m и, соответственно, на расстоянии $l_n = a/2^k$ от другого края этого щита. Но именно на это расстояние и можно сдвинуть всю пачку относительно следующего щита № (m+1), не теряя, тем самым, опоры. Таким образом, с подветренной (внутренней) стороны суммарная открытая площадь пачки из n щитов составит $s_n = a^2\,[1-(½)^n]$.

Максимальная часть (k_n) ширины проема, которую можно перекрыть подобным образом при помощи n щитов, не применяя никаких элементов крепления, составляет :

$$k_n = s_n / ah = a[1-(½)^n] / h.$$

ЗАДАЧА № 3

«*Удар, еще удар…*»

На вершине наклонной плоскости стоит тележка на колесах. На некотором расстоянии ниже нее прямо по ходу стоит ящик, который удерживается на этой наклонной плоскости силами трения. При этом угол наклона плоскости к горизонту (α) и коэффициент трения ящика о плоскость (μ) находятся в предельном соотношении $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu$. Тележку отпускают, и через время T_1 после начала движения тележка ударяется о ящик. Считая этот удар центральным и абсолютно упругим, определить временной интервал (T_2) между первым и вторым столкновением тележки с ящиком. Длину наклонной плоскости считать неограниченной.

Решение:

Направление вниз по наклонной плосости будем считать положительным. Тележка все время (кроме моментов столкновения с ящиком) двигается по наклонной плоскости с постоянным ускорением $g\sin\alpha$. Ящик, получая каждый раз импульс от тележки, мгновенно меняет свою скорость и продолжает равномерный, т.е., без ускорения (в силу соотношения $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu$) спуск с вновь приобретенной скоростью до следующего столкновения с тележкой. Т.о., ускорение их общего центра масс (a_c) будет постоянным, не меняющимся даже в момент столкновения.

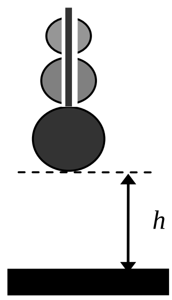
Если перейти в систему центра масс, то в ней уже оба тела будут двигаться с ускорением. Ускорение ящика ($a_я = -a_c$) направлено вверх, а ускорение тележки ($a_т = g\sin\alpha - a_c$) – вниз. Оба эти ускорения также постоянны (кроме моментов столкновения) и направлены к центру масс. Эта система отсчета (назовем ее «центральной»), сама движется с ускорением, т.е., не является инерциальной. Но это не только не осложнит ход рассуждений, а наоборот, значительно их упростит, поскольку в дальнейшем решение будет носить чисто кинематический характер. Из динамики нужно будет вспомнить только следующее: в «центральной» системе отсчета после абсолютно упругого столкновения двух тел векторы их скоростей разворачиваются на 180^o не изменяя своего модуля.

Итак, в нашей «центральной» системе отсчета ящик и тележка одновременно начнут движение из состояния покоя навстречу друг другу с постоянными ускорениями, направленными к центру масс. Через время T_1 в центре масс они столкнутся и, поменяв (после абсолютно упругого удара) свои скорости ровно на обратные, за такое же время (T_1) проделают обратный путь до исходных позиций. Это следует из простейших формул равноускоренного движения. Одновременно остановившись, они снова пойдут навстречу друг другу, в точности повторяя только что описанные события, и через еще один промежуток T_1 опять столкнутся в центре масс. Очевидно, что после первого столкновения все последующие, начиная со второго, будут регулярно повторяться с интервалом $2T_1$.

ЗАДАЧА №4

«*Механический бластер***»**

Булавка представляет собой ***<u>легкую</u>*** иголку со сферической головкой на конце. Масса булавочной головки m_1. На булавку надевают круглую бусинку массой $m_2 = ½\, m_1$, а затем еще одну массой $m_3 = ¼\, m_1$. Бусинки могут свободно без люфта и трения скользить по иголке. Булавку с надетыми на нее бусинками поворачивают в вертикальное положение головкой вниз, поднимают на высоту h над уровнем пола (см. рисунок) и отпускают. На какую высоту подпрыгнет верхняя бусинка (m_3) после отражения всей конструкции от пола.



Столкновения всех элементов друг с другом (пол, головка, бусинки) считать абсолютно упругими, центральными, мгновенными и строго поочередными (т.е. разделенными по времени малыми интервалами). Размерами предметов и сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Если на неподвижный шар налетает шар в n раз большей массы со скоростью v_0, то после абсолютно упругого центрального удара неподвижный шар приобретает скорость

$$v = v_0 \frac{2n}{n+1} \qquad (1)$$

Это следует из законов сохранения энергии и импульса.

В нашем случае, упав с высоты h, все шары имеют скорость $v_0 = \sqrt{2gh}$. В системе отсчета бусинки m_2 головка m_1 (после отражения от пола) налетает на нее со скоростью $2v_0$. После столкновения бусинка m_2 приобретает скорость $\frac{8}{3}v_0$ вверх. Т.о. бусинки m_2 и m_3 сближаются со скоростью $\frac{8}{3}v_0$. После их столкновения бусинка m_3 приобретет скорость (по формуле (1)) $\frac{32}{9}v_0$ в своей системе отсчета, что относительно пола даст $v_0\left(\frac{32}{9}-1\right) = \frac{23}{9}v_0$. С такой скоростью бусинка подлетит вверх на высоту $h^* = \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{23}{9}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g} = h\left(\frac{23}{9}\right)^2 \approx 6.5h$

ЗАДАЧА №5

«*Мал золотник, да дорог***»**

Вертикальная труба высотой $h = 4$м полностью заполнена водой под давлением и герметично закрыта. Давление в нижней части трубы равно $P_o = 2$атм. К дну «прилипли» два одинаковых пузырька воздуха. Других пузырьков в объеме нет. Каким окажется давление в нижней части трубы (P_1), когда один из пузырьков всплывет? Каким оно станет (P_2) после всплытия второго пузырька? Считать воду несжимаемой, а температуру системы неизменной. Давлением насыщенных паров в пузырьках и растворимостью газа в воде пренебречь.

Решение:

V_0- исходные объемы пузырьков

Из-за несжимаемости воды всегда выполняется равенство:

$$V_1+V_2=2V_0$$

Поднялся 1 пузырек:

$V_{верх}= V_0+\Delta V$

$V_{ниж}= V_0+\Delta V$

введем обозначение: $\gamma \equiv \dfrac{\Delta V}{V_0}$

$P_{ниж} = \dfrac{P_0}{1-\gamma}$; $P_{верх} = \dfrac{P_0}{1+\gamma}$; $P_{ниж}$ - $P_{верх}$ =ρgh=0.4атм ; γ^2+10γ-1= 0 ; γ=0.099

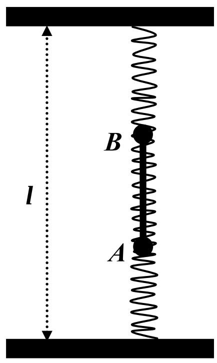
$P_{ниж}$=2.22 атм ; $P_{верх}$=1.82 атм

Когда поднялись оба, их объемы снова V_0. Значит и давление $P'_{верх}$=2 атм (исходное), т.к. не изменились ни V, ни T, ни γ, а значит и P. Тогда $V_{ниж}$= 2 атм + ρgh=2.4 атм

ЗАДАЧА № 6

«*Чем короче, тем…*»

Вертикальная пружина длиной l в ненапряженном состоянии закреплена своими концами на потолке и, соответственно, на полу. К ее середине подвешивают некий груз и медленно его отпускают. При этом он смещается от точки подвеса вниз на глубину h_o= 36см. Далее груз отцепляют и затем отрезок легкого гибкого нерастяжимого троса длиной ⅓ l привязывают концами к двум точкам пружины, одна из которых (точка «А») отстоит на ⅓ l от пола, а другая (точка «В») – на ⅓ l от потолка (см. рисунок). Каким будет смещение этого же груза относительно точки подвеса (h_A), если его подвесить к точке «А»? Каким будет смещение груза (h_B), если его подвесить к точке «В»?



Решение:

Пусть жесткость всей пружины *k*. При подвесе груза к середине пружины обе ее половины (верхняя и нижняя) имеют жесткость *2k* каждая и работают параллельно. Т.о. общая жесткость системы равна $k_0 = 4k$. При подвесе груза к точке «В» у пружины параллельно работают верхняя треть (с жесткостью *3k*) и нижние 2/3 (с жесткостью $\dfrac{3}{2}k$), что в итоге дает общую жесткость $k_B = 4.5k$.

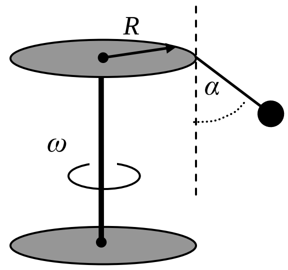
Из очевидного соотношения $k_0h_0 = k_Bh_B$ получаем: $h_B = 32$см

При подвесе груза к точке «А» в параллель работают отдельно верхняя, средняя и нижняя части пружины с жесткостью *3k* у каждой. В итоге $k_A = 9k$, откуда $h_a = 16$см

ЗАДАЧА №7

«*Карусель*»

На верхнем конце вертикальной штанги, как на оси, закреплен горизонтальный диск радиусом $R = 2$м. На краю диска на легкой нерастяжимой нити длиной $l = 2$м подвешен маленький тяжелый груз. Вся система начинает вращаться вокруг вертикальной оси (штанги) с постоянной угловой скоростью, совершая один оборот за время $t_0 = \pi$ секунд. При этом нить, на которой подвешен груз, отклоняется от вертикали на угол α (см. рисунок). Найти величину этого угла. Определить период малых колебаний груза (T*) вокруг положения своего равновесия в системе этой вращающейся «карусели». Сравнить его с периодом малых колебаний груза (T_0), когда «карусель» не вращается.



Рекомендация. Если по ходу решения возникнет уравнение, которое трудно решить аналитически, постарайтесь его максимально упростить и далее воспользуйтесь какой-либо компьютерной программой для получения численного ответа. Но уравнение обязательно представьте, поскольку это существенная часть решения.

Решение:

С учетом очевидного соотношения для натяжения троса $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$ получаем уравнение для угла α:

$$\omega^2 R(1+\sin\alpha) = gtg\alpha$$

После замены переменной $x \equiv \sin\alpha$ и подстановки данных из условия приходим к уравнению:

$$\frac{x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\omega^2 R}{g} = 0.8$$

Численное решение на компьютере дает: $\sin\alpha = 0.825; \cos\alpha = 0.565; \alpha = 55.6^o$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2.81\text{c}; \mathrm{T}^* = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = 2.11\text{c}$$

ЗАДАЧА № 8

«*Как Робин Гуд*»

Два приятеля занимаются стрельбой из пневматического ружья по «летающим тарелкам». Один из них выбрасывает из окна верхнего этажа различные ненужные предметы, а другой с земли (стоя под этим окном) пытается их сбить. Стрелок всегда держит ствол под углом $\alpha = arctg(5/12)$ *к вертикали* и на каждый бросок *мгновенно* реагирует выстрелом. Напарник выбрасывает «тарелки» с различной скоростью, но всегда *вверх* под одним и тем же углом *к горизонту* $\beta = arctg(3/4)$. Какая скорость выбрасывания «тарелки» (V*) обеспечивает попадание, если скорость вылета пули из ружья $V_0 = 26$ м/с. Сколько времени (T) «*живет*» в полете и на каком расстоянии (L) от дома «*гибнет*» подбитая «тарелка», если она вылетает с высоты $h = 33$м над стрелком? Каким будет наименьшее расстояние (l_{min}) между пулей и тарелкой в случае промаха, если скорость вылета тарелки окажется на $\Delta V = 0{,}5$м/с выше «убойной»? Сопротивлением воздуха пренебречь.

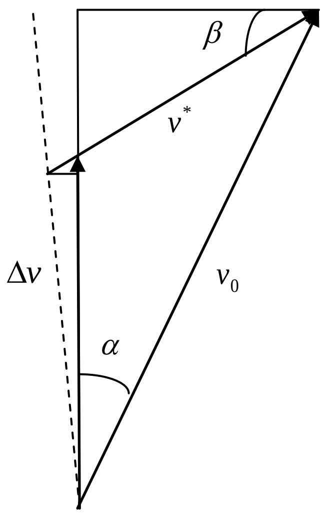
Решение:

Для попадания в тарелку необходимо, чтобы горизонтальные компоненты скоростей пули и тарелки были равны. У пули она неизменна и равна $v_x = v_0 \sin\alpha = 10\text{м/с}$. «Убойной» для тарелки окажется скорость $v^* = \dfrac{v_x}{\cos\beta} = 12.5\text{м/с}$. Вертикальные компоненты скоростей пули и тарелки равны в начальный момент: $v_0 \cos\alpha = 24\text{м/с}$ и $v^* \sin\alpha = 7.5\text{м/с}$.

Скорость сближения пули с тарелкой $\Delta v_y = 24\text{м/с} - 7.5\text{м/с} = 16.5\text{м/с}$ будет оставаться неизменной, поскольку они движутся с общим ускорением g. Пуля настигнет тарелку через

$T = \dfrac{h}{\Delta v_y} = 2c$ на расстоянии $L = v_x T = 20\text{м}$ от дома.

Оценим величину промаха, когда скорость тарелки оказалась на 0,5м/с выше «убойной». Многие ограничиваются следующим простым рассуждением: когда пуля через Т=2с «прибыла» к месту встречи, тарелка его уже покинула, удалившись на расстояние $\Delta l = 0.5\text{м/с}2\text{с} = 1\text{м}$. Это и считают ответом, но это очень грубая оценка. Для более точной нужно построить треугольник скоростей.



Построим два прямоугольных треугольника, имеющих общий катет- это отрезок, равный 10м/с (общая горизонтальная скорость пули и тарелки). Вторыми катетами будут отрезки размером 24м/с и 7,5м/с, соответствующие их вертикальным скоростям. Затем проведем гипотенуз. Они равны, соответственно, 26м/с и 12,5м/с. Треугольник, составленный из двух гипотенуз и отрезка, равного разности катетов и есть треугольник скоростей. По гипотенузам направлены векторы абсолютных скоростей, а по катету- вектор их скорости друг относительно друга. Если скорость тарелки превышена, то ее гипотенузу нужно продлить за пределы катета на величину превышения, а из ее конца опустить перпендикуляр на катет. Получившийся маленький треугольник дает представление о величине промаха. Его гипотенуза соответствует оценке $\Delta l = 0.5\text{м/с}2\text{с} = 1\text{м}$. Но, очевидно, что катет этого треугольника точнее отражает реальность: $\Delta l' = \Delta l \cos\beta = 0.8\text{м}$. Этот результат тоже можно уточнять, но вряд ли это имеет смысл в рамках данной задачи.