Отборочный этап Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2012/2013 г.

10 класс

ЗАДАЧА № 1

«*Вокруг да около*»

Из проволоки сделан жесткий (недеформируемый) каркас в виде правильного 2012-угольника, который лежит на поверхности *гладкого* круглого стола. Центры стола и каркаса совпадают. Вершины каркаса пронумерованы по порядку от № 1 до № 2012. В центре стола просверлено круглое отверстие конечного диаметра, величина которого меньше диаметра вписанной в этот каркас окружности. Через это отверстие пропущены 2012 легких тонких гладких нитей. Каждая из них одним своим концом привязана к соответствующей вершине каркаса. Каркас удерживают в этом положении и затем к противоположным концам нитей (свисающим под столом) привязывают грузы, причем к вершине №1 привязывают груз массой $\boldsymbol{m}$, к вершине №2 – груз массой $2\boldsymbol{m}$, к вершине №3 – груз массой $3\boldsymbol{m}$ и т.д. по порядку, т.е., к вершине № n привязывают груз массой $n\boldsymbol{m}$. Найти равнодействующую всех сил, с которой подвешенные грузы действуют на каркас. Иными словами, требуется ответить на 2 вопроса:

1) Около вершины с каким № надо поставить упор, чтобы каркас не сдвинулся с места после того, как его отпустят?
2) С какой силой (F) каркас будет давить на этот упор?

Решение:

Снимем с каждой нити по одному грузу $\boldsymbol{m}$. В силу симметрии этой операции вектор равнодействующей всех сил ($\boldsymbol{F_0}$), очевидно, останется неизменным. Затем все снятые грузы (в количестве $2012\,\boldsymbol{m}$) подвесим на нить №1, которая после первой процедуры окажется пустой. В итоге мы получим картину, которая отличается от исходной только поворотом относительно центра на $1/2012$ часть полного оборота, т.е., на угол $\alpha = 360^{\circ}/2012 = 2\pi/2012$ радиан. Поворот происходит в сторону возрастания номеров. Действительно, теперь к вершине № n будет привязан груз массой $(n-1)\boldsymbol{m}$, и только к вершине № 1 будет привязан груз массой $2012\,\boldsymbol{m}$, который раньше висел на нити №2012. При этом вектор равнодействующей всех сил ($\boldsymbol{F_1}$) также повернется на этот угол в ту же сторону, оставшись неизменным по модулю. Но поворот этот мы получили, подвесив к вершине №1 груз $2012\,\boldsymbol{m}$, т.е., добавив к равнодействующей $\boldsymbol{F_0}$ силу $\boldsymbol{F}^*$, равную по модулю $F^*=2012\,mg$ и направленную из вершины №1 в центр и далее в вершину №1007 (1+ ½·2012):

$$\boldsymbol{F_1} = \boldsymbol{F_0} + \boldsymbol{F}^*.$$

Эти 3 вектора сил ($\boldsymbol{F_0}$, $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F}^*$) образуют равнобедренный треугольник с основанием $\boldsymbol{F}^*$ и углом при вершине $\alpha = 2\pi/2012$. Используя радианную меру этого угла и учитывая его малость, можно записать для сторон треугольника:

$$F^*/F_o = 2\pi/2012 \quad \rightarrow \quad 2012\,mg/F_o = 2\pi/2012,$$

откуда следует ответ на вопрос №2:

$$F_o = (2012)^2\,mg/2\pi.$$

Биссектриса (она же высота) этого треугольника перпендикулярна его основанию $\boldsymbol{F}^*$ и направлена по линии, проходящей через точки № 504 (1+ ¼·2012) и № 1510 (1+ ¾·2012). Значит, направления векторов $\boldsymbol{F_0}$ и $\boldsymbol{F_1}$, проходя через центр 2012-угольника, симметрично «охватывают» точку № 504 с обеих сторон с угловым смещением от нее на $\pm\alpha/2$. Соответственно, исходный вектор авнодействующей всех сил ($\boldsymbol{F_0}$) направлен посередине между точками № 503 и № 504. В исходном состоянии необходимо подпереть обе эти точки, симметрично поставив к ним общий упор снаружи 2012-угольника. Многоугольник можно подпереть и изнутри, но в точках, диаметрально противоположных указанным , т.е. № 1509 и № 1510. Для полноты отметим, что вектор $\boldsymbol{F_1}$ направлен, соответственнпо, посередине между точками № 504 и № 505.

Для наглядности приведем другое решение вопроса о точках упора. Грузы, привязанные к любым двум диаметрально противоположным вершинам (с номереми n и n+1006) действуют на каркас с одной и той же (по модулю) силой F=1006 mg, направленной в каждой паре от центра «О» к вершине с меньшим номером. Количество таких пар равно 1006, а точки, в которые направлены эти силы $\boldsymbol{F}$, имеют номера от № 1 до

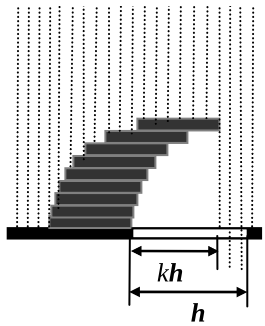
№ 1006. Вектор равнодействующей всех сил, в силу симметрии картины, будет, очевидно, направлен по биссектрисе центрального угла между этими крайними точками. Эта биссектриса нацелена в точку с номером ½·(1+1006) = 503,5, т.е., проходит симметрично между точками и № 503 и № 504.

ЗАДАЧА № 2

«*Навстречу всем ветрам*»

Сплошной (без просветов) забор сделан из жестких _гладких_ тонких квадратных щитов размером $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$. В заборе оставлен достаточно большой проем (шириной $\boldsymbol{h} > 2\boldsymbol{a}$) для установки ворот. Створки ворот собираются делать из таких же щитов, которых осталось всего n штук.

Когда _перпендикулярно забору_ подул сильный ветер, проем решили закрыть (хотя бы частично) от ветра этими щитами. Для этого их всех плотно прижали плоскостями друг к другу и затем, поставив эту пачку торцом на грунт, прислонили к забору в вертикальном положении. Далее щиты поочередно, начиная с наружного, стали по мере возможности сдвигать друг относительно друга вдоль забора, как это показано на рисунке (вид сверху). Пунктирные линии показывают направление воздушного потока. Какова максимальная часть (k_n) ширины проема, которую можно перекрыть подобным образом при помощи n щитов, не применяя никаких элементов крепления?



Толщиной щитов, их деформацией и трением их о грунт пренебречь. Считать, что сила давления ветра на щит пропорциональна площади открытой ветру поверхности.

Решение:

Пронумеруем щиты по порядку, начиная с наружного (верхнего на рисунке). Максимально возможный сдвиг щита № m относительно щита № $(m+1)$ равен $a/2^m$. При таком способе сдвига суммарная открытая ветру площадь пачки из первых k щитов составляет $S_m = 2a^2\,[1-(½)^m]$. Равнодействующая сил ветровой нагрузки на эту пачку (F_m) приложена к геометрическому центру площадки S_m. Этот центр находится, очевидно, на расстоянии $L_m = S_m / 2a = a[1-(½)^m]$ от наружного (левого на рисунке) края щита № m и, соответственно, на расстоянии $l_n = a/2^k$ от другого края этого щита. Но именно на это расстояние и можно сдвинуть всю пачку относительно следующего щита № $(m+1)$, не теряя, тем самым, опоры. Таким образом, с подветренной (внутренней) стороны суммарная открытая площадь пачки из n щитов составит $s_n = a^2\,[1-(½)^n]$.

Максимальная часть (k_n) ширины проема, которую можно перекрыть подобным образом при помощи n щитов, не применяя никаких элементов крепления, составляет :

$$k_n = s_n / ah = a[1-(½)^n] / h.$$

ЗАДАЧА № 3

«*Удар, еще удар…*»

На вершине наклонной плоскости стоит тележка на колесах. На некотором расстоянии ниже нее прямо по ходу стоит ящик, который удерживается на этой наклонной плоскости силами трения. При этом угол наклона плоскости к горизонту (α) и коэффициент трения ящика о плоскость (μ) находятся в предельном соотношении $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu$. Тележку отпускают, и через время T_1 после начала движения тележка ударяется о ящик. Считая этот удар центральным и абсолютно упругим, определить временной интервал (T_2) между первым и вторым столкновением тележки с ящиком. Длину наклонной плоскости считать неограниченной.

Решение:

Направление вниз по наклонной плосости будем считать положительным. Тележка все время (кроме моментов столкновения с ящиком) двигается по наклонной плоскости с постоянным ускорением $g\sin\alpha$. Ящик, получая каждый раз импульс от тележки, мгновенно меняет свою скорость и продолжает равномерный, т.е., без ускорения (в силу соотношения $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu$) спуск с вновь приобретенной скоростью до следующего столкновения с тележкой. Т.о., ускорение их общего центра масс (a_c) будет постоянным, не меняющимся даже в момент столкновения.

Если перейти в систему центра масс, то в ней уже оба тела будут двигаться с ускорением. Ускорение ящика ($a_я = -a_c$) направлено вверх, а ускорение тележки ($a_т = g\sin\alpha - a_c$) – вниз. Оба эти ускорения также постоянны (кроме моментов столкновения) и направлены к центру масс. Эта система отсчета (назовем ее «центральной»), сама движется с ускорением, т.е., не является инерциальной. Но это не только не осложнит ход рассуждений, а наоборот, значительно их упростит, поскольку в дальнейшем решение будет носить чисто кинематический характер. Из динамики нужно будет вспомнить только следующее: в «центральной» системе отсчета после абсолютно упругого столкновения двух тел векторы их скоростей разворачиваются на 180^o не изменяя своего модуля.

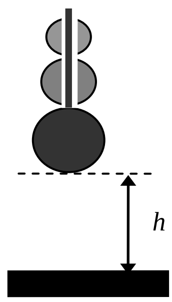
Итак, в нашей «центральной» системе отсчета ящик и тележка одновременно начнут движение из состояния покоя навстречу друг другу с постоянными ускорениями, направленными к центру масс. Через время T_1 в центре масс они столкнутся и, поменяв (после абсолютно упругого удара) свои скорости ровно на обратные, за такое же время (T_1) проделают обратный путь до исходных позиций. Это следует из простейших формул равноускоренного движения. Одновременно остановившись, они снова пойдут навстречу друг другу, в точности повторяя только что описанные события, и через еще один промежуток T_1 опять столкнутся в центре масс. Очевидно, что после первого столкновения все последующие, начиная со второго, будут регулярно повторяться с интервалом $2T_1$.

ЗАДАЧА №4

«*Механический бластер***»**

Булавка представляет собой ***легкую*** иголку со сферической головкой на конце. Масса булавочной головки m_1. На булавку надевают круглую бусинку массой $m_2 = ½\, m_1$, а затем еще одну массой $m_3 = ¼\, m_1$. Бусинки могут свободно без люфта и трения скользить по иголке. Булавку с надетыми на нее бусинками поворачивают в вертикальное положение головкой вниз, поднимают на высоту h над уровнем пола (см. рисунок) и отпускают. На какую высоту подпрыгнет верхняя бусинка (m_3) после отражения всей конструкции от пола.

Столкновения всех элементов друг с другом (пол, головка, бусинки) считать абсолютно упругими, центральными, мгновенными и строго поочередными (т.е. разделенными по времени малыми интервалами). Размерами предметов и сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение:

Если на неподвижный шар налетает шар в n раз большей массы со скоростью v_0, то после абсолютно упругого центрального удара неподвижный шар приобретает скорость

$$v = v_0 \frac{2n}{n+1} \qquad (1)$$

Это следует из законов сохранения энергии и импульса.

В нашем случае, упав с высоты h, все шары имеют скорость $v_0 = \sqrt{2gh}$. В системе отсчета бусинки m_2 головка m_1 (после отражения от пола) налетает на нее со скоростью $2v_0$. После столкновения бусинка m_2 приобретает скорость $\frac{8}{3}v_0$ вверх. Т.о. бусинки m_2и m_3 сближаются со скоростью $\frac{8}{3}v_0$. После их столкновения бусинка m_3 приобретет скорость (по формуле (1)) $\frac{32}{9}v_0$ в своей системе отсчета, что относительно пола даст $v_0\left(\frac{32}{9}-1\right) = \frac{23}{9}v_0$. С такой скоростью бусинка подлетит вверх на высоту $h^* = \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{23}{9}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g} = h\left(\frac{23}{9}\right)^2 \approx 6.5h$

ЗАДАЧА №5

«*Мал золотник, да дорог***»**

Вертикальная труба высотой $h = 4$м полностью заполнена водой под давлением и герметично закрыта. Давление в нижней части трубы равно $P_o = 2$атм. К дну «прилипли» два одинаковых пузырька воздуха. Других пузырьков в объеме нет. Каким окажется давление в нижней части трубы (P_1), когда один из пузырьков всплывет? Каким оно станет (P_2) после всплытия второго пузырька? Считать воду несжимаемой, а температуру системы неизменной. Давлением насыщенных паров в пузырьках и растворимостью газа в воде пренебречь.

Решение:

V_0- исходные объемы пузырьков

Из-за несжимаемости воды всегда выполняется равенство:

$$V_1+V_2=2V_0$$

Поднялся 1 пузырек:

$V_{верх}= V_0+\Delta V$

$V_{ниж}= V_0+\Delta V$

введем обозначение: $\gamma \equiv \dfrac{\Delta V}{V_0}$

$$P_{ниж} = \frac{P_0}{1-\gamma}$$

$$P_{верх} = \frac{P_0}{1+\gamma}$$

$P_{ниж} - P_{верх} =\rho gh=0.4$атм

$\gamma^2+10\gamma-1= 0$

$\gamma=0.099$

$P_{ниж}=2.22$ атм

$P_{верх}=1.82$ атм

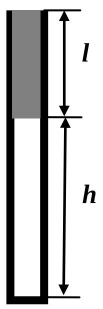
Когда поднялись оба, их объемы снова V_0. Значит и давление $P'_{верх}=2$ атм (исходное), т.к. не изменились ни V, ни T, ни γ, а значит и P. Тогда

$$V_{ниж}= 2 \text{ атм} + \rho gh=2.4 \text{ атм}$$

ЗАДАЧА № 6

«*У последней черты*»

Вертикальная цилиндрическая трубка длиной L=96см запаяна снизу. В нижней ее части находится воздух, закрытый сверху жидкой ртутной пробкой, доходящей до открытого верхнего обреза трубки. Высота ртутной пробки равна $l = 40$ см, а воздушного столба, соответственно, h=56см (смотри рисунок). Вся система находится при температуре $t^o = +16^o$C и атмосферном давлении $H = 760$ мм ртутного столба. Если трубку медленно нагревать, воздух начнет расширяться, постепенно выдавливая ртуть, излишки которой будут выливаться. До какой максимальной температуры (T*) можно нагревать трубку, чтобы воздух продолжал оставаться в ней под ртутной пробкой? Какова минимальная высота (l_{min}) этой пробки? Поверхностными явлениями и температурными изменениями плотности ртути пренебречь.



Решение:

Пусть x-высота ртутной пробки, уменьшающаяся по ходу нагрева. Тогда уравнение Клапейрона-Менделеева можно записать в виде:

$(H+x)(L-x)=\frac{\nu RT}{S\rho g}$, где S- площадь сечения трубки, ρ- плотность ртути.

Зависимость *T(x)* имеет вид квадратичной параболы с максимумом. После достижения этого максимума дальнейший нагрев невозможен под ртутной пробой, поскольку дальнейшее уменьшение высоты пробки *x* соответствовало бы по графику понижению температуры. Поэтому малейшее добавление тепла сразу сбросит всю ртутную пробку. Находим эти экстремальные параметры из уравнения: $\frac{dT}{dx}=0 \Rightarrow x_{\min}=l_{\min}=\frac{L-H}{2}=10\text{см}$

При этом $T=T_{\max}=329\,K=56^{o}C$

ЗАДАЧА № 7

«Неоднородная» прямая

Процесс расширения 1 моля идеального газа имеет на PV-диаграмме вид отрезка прямой с концами в точках (P_1 ; V_1) и (P_2 ; V_2), причем $P_2 = P_1/\beta$, а $V_2=\beta V_1$, где β – произвольное положительное число в интервале $1<\beta<\infty$. Определить теплоемкости газа (C_1 и C_2) в самом начале (C_1) и в самом конце (C_2) указанного процесса. Оценить теплоемкость газа (C*) при максимальной температуре, достигнутой им в данном процессе.

Решение:

На прямой:

$$P(V)=P_1\frac{\beta+1}{\beta}-\frac{P_1}{\beta V_1}V \Rightarrow dP=\frac{-P_1}{\beta V_1}dV \qquad (1)$$

Вариация уравнения Клапейрона-Менделеева для ν=1

PdV+VdP=RdT после подстановки в (1) имеет вид в точке P_1V_1:

$$P_1dV+V_1dP=P_1dV-\frac{P_1}{\beta}dV=\frac{\beta-1}{\beta}PdV=RdT \Rightarrow PdV=\frac{\beta}{\beta-1}RdT$$

Из первого начала термодинамики $dQ=dU+dA=\frac{3}{2}RdT+PdV=\left(\frac{3}{2}+\frac{\beta}{\beta-1}\right)RdT$

Теплоемкость в точке P_1V_1: $C_1=\frac{dQ}{dT}=\left(\frac{3}{2}+\frac{\beta}{\beta-1}\right)R.$

В точке P_2V_2 из аналогичных выкладок имеем:

$$P_2dV=-\frac{R}{\beta-1}dT \Rightarrow C_2=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\beta-1}\right)R.$$

Ищем при каких P_m и V_m T максимальна:

Из $\frac{\mathrm{d(PV)}}{\mathrm{dV}}=0$ получаем $V_m=V_1\frac{\beta+1}{2};P_m=P_1\frac{\beta+1}{2\beta}$

Подставляем полученные значения:

$$\mathrm{P_m}dV+V_mdP=0 \Rightarrow dT=0 \Rightarrow C_m \to \infty$$

ЗАДАЧА № 8

«Шире, глубже, дальше…»

Из металлических проводов спаяли каркас правильного 2012-угольника со всеми возможными диагоналями. Толщины проводов подобраны так, что каждая сторона и каждая диагональ имеет сопротивление r_o . Контакта между диагоналями внутри каркаса нет (провода покрыты непроводящим лаком). Определить сопротивление (R_o) между двумя произвольными вершинами каркаса.

Решение:

Выберем две произвольные вершины каркаса и обозначим их символами «А» и «В». Если к ним подсоединить источник тока, для зарядов есть 2011 различных путей движения. Самый короткий по прямому проводу от «А» к «В» имеет сопротивление r_o. Другую возможность дает путь последовательно по двум проводам («А-Х» и «Х-В») через одну из остальных вершин «Х». Таких путей насчитывается 2010 (по количеству оставшихся вершин «Х»). Каждый из путей «А-Х-В» имеет сопротивление $2\,r_o$. Все они эквивалентны друг другу и токи по ним текут одинаковые. Следовательно, все эти оставшиеся вершины электрически «равноправны» и, соответственно, имеют одинаковый потенциал. А это значит, что заряды между ними не текут. Других путей для тока нет. Итак, для тока имеется 2011 параллельных путей, один из которых имеет сопротивление r_o, а все остальные по $2r_o$. Легко видеть, что полное сопротивление между точками «А» и «В» составит величину:

$$R_o = R_{AB} = 2r_o / 2012 = r_o / 1006.$$

Для общности укажем ответ в случае произвольного N-угольника: $R_{AB} = 2r_o / N$.

ЗАДАЧА № 9

«Закономерная случайность»

Вертикальная круглая мишень радиусом $\boldsymbol{r}$ совершает горизонтальные гармонические колебания в своей плоскости. Зависимость координаты центра мишени (x_c) от времени дается выражением $x_c = A\,sin\,(\omega t)$, где $A \gg \boldsymbol{r}$. Частота колебаний (ω) столь велика, что вести прицельный огонь по мишени невозможно. Стрелок направил прицел винтовки в точку с координатой x_o=0 и подсоединил спусковой механизм к генератору случайных чисел, так, чтобы выстрелы производились в произвольные моменты времени.

Оценить количество отверстий в мишени (n_o) после N таких выстрелов, считая N достаточно большим, а отверстия – точечными и неповторяющимися (пуля дважды в одну точку не попадает). В точку с какой координатой (x*) надо направить прицел, чтобы количество отверстий (n*) было максимальным? Чему оно (n*) равно? Решить задачу в общем виде и конкретно для случая $A = 10\boldsymbol{r}$.

Как может измениться ответ, если со случайного темпа стрельбы перейти на регулярный? Например – стрельба из автомата, при которой пули вылетают с определенным интервалом.

Каким будет ответ, если каждый раз случайно выбирать не только момент выстрела, но и точку прицела в пределах перемещения мишени?

Решение:

$$n_0 = N\,\frac{2\arcsin\left(\dfrac{r}{A}\right)}{\pi}$$

Для максимальной результативности целиться нужно в точку с координатой $x^* = \pm(A - r)$, в которой как бы «замирает» ближняя к центру мишени в момент ее максимального (амплитудного) смещения. При этом: $n^* = N\left[1 - \dfrac{2\arcsin\left(1 - \dfrac{2r}{A}\right)}{\pi}\right]$

Для $A = 10r$ имеем $n_0 = N0.0638\,(\approx 6.4\%);\ x^* = \pm 0.9A;\ n^* = 0.41N(\approx 41\%)$

При регулярном темпе стрельбы процент попаданий может иметь любое значение от 0 до 100%. Крайние значения будут в случае совпадения (или кратности) частот мишени и автомата.

При случайной стрельбе по случайным точкам вероятность попадания w будет равна: $w = \dfrac{2r}{2(A + r)}$