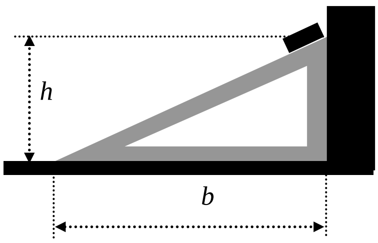
# Олимпиада школьников СПбГУ по физике 2012-2013

## *заключительный этап*

ВАРИАНТ № 2 (11 класс)

ЗАДАЧА № 1

На полу, прижатый к стене, стоит гладкий клин высотой $h = 40$см и основанием $b = 75$см. Масса клина $M$ = 775г. В верхней части его наклонной поверхности удерживается брусок длиной $l$ = 25см и массой $m$ = 289г, также прижатый к стене (см. рисунок). Брусок отпускают, и он начинает скользить без трения вниз по плоскости.




Определить силу давления клина на стену ($N$) и на пол ($P$) во время спуска. Через сколько секунд ($t$) после начала спуска брусок коснется пола?

Решение.

Если $\alpha$ – угол наклона плоскости к горизонту, то ускорение бруска $a = g{\cdot}\sin\alpha$, а его горизонтальная компонента $a_x = g{\cdot}\sin\alpha{\cdot}\cos\alpha$. Отсюда, горизонтальная компонента силы давления бруска на клин и, по «эстафете», клина на стену ($N$) равна:

$$N = mg{\cdot}\sin\alpha{\cdot}\cos\alpha = 1{,}2\text{Н};$$

Вертикальная компонента силы давления бруска на клин равна $mg{\cdot}\cos^2\alpha$. К ней нужно добавить вес самого бруска. Т.о., сила давления всей системы на пол равна:

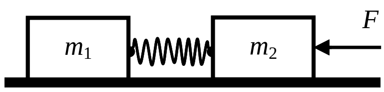
$$P = g\,(M + m\cos^2\alpha) = 10\text{Н};$$

Из условия следует. что длина наклонной плоскости равна $L$=85см, а путь бруска до соприкосновения с полом составит $s=L - l$ = 60см. Поэтому пола брусок достигнет за время:

$$t = (2s/a)^{½} = (2s/g{\cdot}\sin\alpha)^{½} = 0{,}5\text{с}.$$

ЗАДАЧА № 2

На шероховатом столе лежат два бруска, сцепленные пружиной. Их массы $m_1 = 400$г и $m_2 = 600$г. Первый брусок пытаются сдвинуть с места, толкая на него через пружину второй брусок горизонтальной силой $F$, как это показано на рисунке. Минимальная сила, необходимая для сдвига, равна $F_{min}$ = 2Н. Определить Коэффициент трения ($\mu$) между брусками и столом.




Решение.

Брусок $m_1$ сдвинется с места, если пружина надавит на него с силой $F_{пр} \geq \mu\, g{\cdot}m_1$. Для этого минимальное сжатие пружины жесткостью $k$ должно составить величину $x_{\min} = \mu\, g\, m_1 / k$. Если постоянная сила $F$, приложенная к бруску $m_2$, продвинет его до полной остановки на величину $x$, то она совершит работу:

$$A = Fx = kx^2/2 + \mu\, g{\cdot}m_2\, x, \quad \text{откуда} \quad F_{min} = k\,x_{\min}/2 + \mu\, g{\cdot}m_2 = \mu\, g(\,m_1/2 + m_2) \quad \text{и, соответственно:}$$

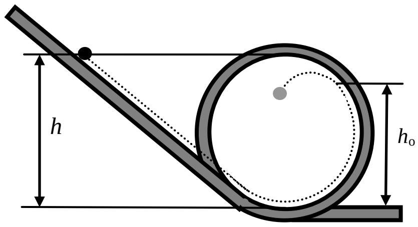
$$\mu = F_{min}/g(\,m_1/2 + m_2) = 0{,}25.$$

**Ответ:** $\mu = F_{min}/\text{g}{\cdot}(\text{m}_1+\text{m}_2/2) = 0{,}25.$

ЗАДАЧА № 3

Установка для демонстрации «мертвой петли» представляет собой гладкий желоб, изогнутый в виде петли в вертикальной плоскости. Петля (см. рисунок) состоит из прямой наклонной части, которая плавно (по касательной) переходит в окружность радиуса $R = 60$см, а та, в свою очередь, также плавно переходит в горизонтальный прямой участок.

Для того, чтобы скользящий по желобу (без трения) шарик совершил «мертвую петлю», то есть проскользил по круглому участку без отрыва от желоба, его надо пустить по наклонному участку с высоты $H$, большей диаметра петли. Пренебрегая размерами шарика, найти наименьшее значение этой высоты ($H_{min}$), позволяющее шарику совершить «мертвую петлю».




Если же шарик пустить с чуть меньшей высоты, то он, не закончив «мертвой петли», оторвется от желоба и некоторое время будет находиться в свободном полете (см. рисунок, на котором пунктиром показана его примерная траектория). На какой высоте ($h_o$) произойдет отрыв шарика от желоба, если пустить его с высоты $h$, равной диаметру петли ($h = 2R = 120$см)?

Решение.

В верхней точке «мертвой петли» минимальная скорость определяется соотношением $(v_{min})^2/R = g$. Учитывая, что потеряв высоту $h$, тело приобретает скорость $v = \sqrt{2gh}$ , имеем $2h_{min}/R\ =1$ или $h_{min} = R/2$, откуда:

$$H_{min} = h_{min} + 2R = h_{min} = 2{,}5R = 150 \text{ см}.$$

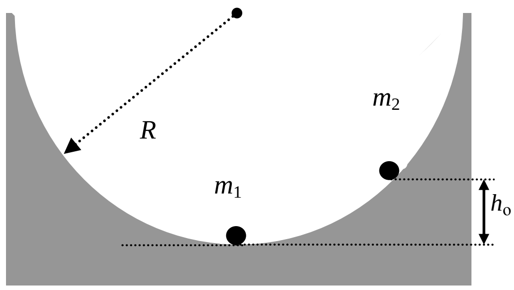
Во время «мертвой петли» нормальное давление шарика на опору равно $N = m(v^2/R - g\cos\alpha)$, где $\alpha$ – центральный угол дуги между шариком и верхней точкой окружности. При спуске шарика с начальной высоты $h = 2R$ это выражение принимает вид: $N = m[2g(1- g\cos\alpha) - g\cos\alpha] = mg(2 - 3\cos\alpha)$. Отрыв произойдет при $N = 0$, т.е., в точке, для которой $\cos\alpha = ⅔$. Она находится на высоте:

$$h_o = R(2 - \cos\alpha) = 4R / 3 = 80\text{см}.$$

**Ответ:** $H_{min} = 2{,}5$ R = 150см; $h_o$= 4R/3 = 80см.

ЗАДАЧА № 4

Желоб для скейтбординга имеет в разрезе профиль полуцилиндра радиусом $R$=5м. На его дне лежит шар массой $m_1$ . На скате желоба на высоте $h_o = 0{,}09R$ от дна ставят второй шар массой $m_2 = ½\, m_1$ и отпускают (см. рисунок). Через какое время после этого ($T_1$) произойдет столкновение шаров. Считая это столкновение центральным и абсолютно упругим, найти высоту подъема каждого из шаров ($h_1$ и, соответственно $h_2$), после столкновения. Найти временной интервал ($T_2$) между первым и вторым столкновениями шаров. Определить высоту подъема шаров ($H_1$ и, соответственно $H_2$) после второго столкновения. Шары считать материальными точками. Трением пренебречь.




Решение.

Пусть шар массой $m$ движется со скоростью $v_o$. После его абсолютно упругого центрального удара о неподвижный шар массой $M$ их скорости окажутся равными, соответственно:

$$v_m = v_o\,(m - M) / (m + M) \quad \text{и} \quad v_M = 2v_o\, m / (m + M) \qquad (1)$$

Решение (1) вытекает из законов сохранения энергии и импульса. Его можно считать универсальным и применять в общем случае, когда движутся оба шара. Для этого нужно перейти в систему отсчета, связанную с одним из них, и после расчетов вернуться, при необходимости, в исходную систему. Именно этот прием мы и используем в дальнейшем. Отметим то важное следствие из (1), что при ударе о более тяжелый шар ($m < M$) налетающий шар ($m$) полетит обратно.

В нашем случае шар $m_2$, соскользнув с высоты $h_o$= 45см, приобретет скорость $v_o = \sqrt{(2gh_o)} = 3$ м/с. Время его спуска до дна составит $T_1 = ½\,\pi\sqrt{(R/g)} = 1{,}11$с, что соответствует четверти периода колебаний математического маятника длиной $R$. После столкновения шаров они, согласно (1), будут иметь скорости, соответственно:

$$v_1 = 2\ м/с \quad и \quad v_2 = -1\ м/с\ (пойдет\ обратно)\ ,$$

что позволит каждому из них подняться на соответствующую высоту ($h = v^2/2g$):

$$h_1 = 20см \quad и \quad h_2 = 5см.$$

Период колебаний маятника не зависит (при малых углах отклонения) от амплитуды. Поэтому второе столкновение шаров снова произойдет в центре желоба через время $T_2 = 2T_1 = 2{,}22с$ и, естественно, с теми же (по модулю) скоростями, с которыми они «разбежались». Тогда, из (1) и соображений, изложенных в самом начале, находим скорости шаров ($V_1$ и $V_2$) после второго столкновения: $V_1 = 0$ и $V_2 = -3$ м/с, откуда:

$$H_1 = 0 \quad и \quad H_2 = 45см.$$

Система вернулась в исходное (стартовое) состояние.

**Ответ:** $T_1$=1,11; $h_1$=20см; $h_2$=5см; $T_2$ = 2,22с; $H_1$ = 0; $H_2 = h_o$ = 45см.

## ЗАДАЧА № 5

На поверхности Марса температура достигает значения T = – 30°С. Оценить среднеквадратичную скорость теплового движения молекул гелия ($V_{He}$) и кислорода ($V_{O2}$) при этой температуре. Сравнить ее со второй космической скоростью для Марса ($V_{II}$). Радиус Марса R=3,4·10 $^6$ м, ускорение свободного падения на Марсе составляет 0,4 от земного. Массы атомов гелия и кислорода принять равными 4 и, соответственно, 16 аем (атомных единиц массы). 1аем=1,66·10$^{-27}$кг, констаета Больцмана $k_Б = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Решение.

Одним из фундаментальных положений молекулярно-кинетической теории (МКТ) является следующее. В системе, находящейся в термодинамическом равновесии при абсолютной температуре $T$, на каждую степень свободы в среднем приходится энергия $\varepsilon = ½ k_Б T$. Поступательное движение имеет 3 степени свободы, и его средняя энергия для любой частицы данной системы ($E$) равна: $E = ½ m <v^2>/ = 3 k_Б T/ 2$. Отсюда, среднеквадратичная скорость такой частицы (V) дается выражением: $V = \sqrt{<v^2>} = \sqrt{(3 k_Б T/m)}$. Таким образом:

$$V_{He} \approx 12203\ м/с; \qquad V_{O2} \approx 430\ м/с$$

Вторая космическая скорость для любой планеты ($V_{II}$) дается выражением: $V_{II} = (2gR)^{½}$, где $R$ – радиус планеты, а $g$ – ускорение свободного падения на ее поверхности. Для Марса это составит: $V_{II} \approx 5200$м/с.

**Ответ:** $V=(3kT/m)^{½} \rightarrow V_{He} \approx 1220$м/с; $V_{O2} \approx 430$м/с; $V_{II} = (2gR)^{½} \approx 5200$м/с.

## ЗАДАЧА № 6

Не пользуясь таблицами, определить относительную влажность воздуха в комнате при температуре $t$ = 25°С, если измеренная точка росы в ней оказалась равной $t_{росы}$ = 17°С. Считать, что в этой температурной области плотность насыщенного пара ($\rho$*) пропорциональна 16-й степени ***абсолютной*** температуры:

$$\rho^*(T) = A\cdot T^{16},\ где\ A – константа.$$

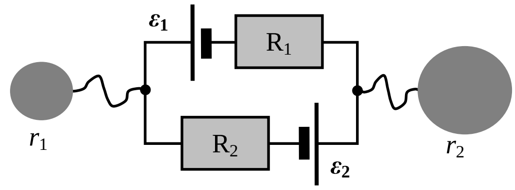
Решение.

Точка росы ($t_{росы}$) для любой атмосферы – это та наибольшая температура, при которой имеющаяся абсолютная влажнось воздуха даст 100%-ную относительную ($\varphi$=1). Напомним, что относительная влажность равна отношению имеющейся абсолютной влажности к максимально возможной (насыщенной) при данной температуре. Поскольку при изменении температуры (вплоть до точки росы) абсолютная влажнось воздуха предполагается неизменной, то относительная влажность ($\varphi$) при температуре $t$ дается выражением: $\varphi = (T_{росы} / T)^{16}$, где значения температур надо брать по шкале Кельвина. Т.о., получаем:

**Ответ:** $\varphi = (t_{росы}/t)^{16} = (290\,K / 298\,K)^{16} = 0{,}647 = 64{,}7\%$.

ЗАДАЧА № 7

Два источника постоянного тока, два резистора и два металлических шара собраны в схему, представленную на рисунке. Шары изначально не заряжены и удалены друг от друга на значительное расстояние. ЭДС источников ($\varepsilon_i$), сопротивления резисторов ($R_i$) и радиусы шаров ($r_i$) имеют следующие значения: $\varepsilon_1 = 6$В, $\varepsilon_2 = 9$В, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $r_1 = 10$см, $r_2 = 30$см. Символ Ω (заглавная греческая «омега») – одно из стандартных обозначений единицы сопротивления «Ом».




Найти установившийся потенциал каждого из шаров ($\varphi_1$ и $\varphi_2$) и величину заряда ($q$), перетекшего с одного шара на другой. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

Решение.

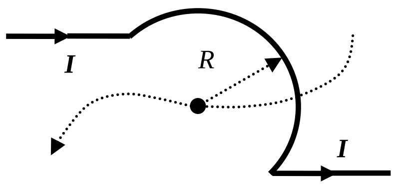
В этой простой цепи несложно найти ток ($I$ = 5А) и, затем, разность потенциалов ($\varphi_2 - \varphi_2$) между шарами, т.е., напряжение ($U = \varphi_2 - \varphi_1$) между точками подключения шаров: $U = \varepsilon_2 - I_2 R_2 = I_1 R_1 - \varepsilon_1 = 4$В. Поскольку потенциал изолированного заряженного шара равен $\varphi_2 = q/4\pi\varepsilon_o r$, то из условий $q_1 + q_2 = 0$ и $\varphi_2 - \varphi_1 = 4$В, получаем

**Ответ:** $\varphi_1 = -Ur_2/(r_1 + r_2) = -3$В; $\varphi_2 = +Ur_1/(r_1 + r_2) = +1$В; $q = 4\pi\varepsilon_o \varphi_i r_i = 0{,}033$нКл.

ЗАДАЧА № 8.

<u>*Бесконечный прямой тонкий*</u> провод, по которому протекает ток ***I***, изогнули <u>*в середине*</u> так, как показано на рисунке. Прямые участки провода параллельны друг другу, а петля образует дугу, составляющую половину окружности радиусом $R$ (для наглядности радиус представлен на рисунке пунктирной стрелкой). Все участки провода лежат в одной (горизонтальной) плоскости.

В той же плоскости с постоянной скоростью V движется металлический незаряженный шарик радиусом $r \ll R$. Его траектория и направление движения представлены на рисунке (вид сверху) пунктирной линией со стрелкой. В некоторый момент он проходит центр дуги (см. рис.).




Определить, между какими точками шарика (верхней. нижней, передней, задней, левой, правой по ходу) разность потенциалов, индуцированная его движением в магнитном поле проводника, окажется в этот момент наибольшей. Найти ее величину ($U_{max}$).

Решение.

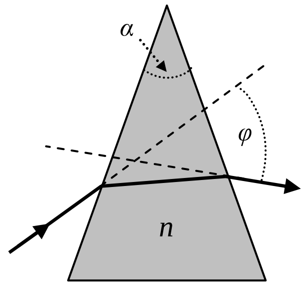
Центр дуги расположен симметрично между двумя прямыми участками провода. Поэтому их вклады в создаваемое магнитное поле равны, но направлены в противоположные стороны. По правилу правого буравчика поле от левого отрезка направлено вглубь рисунка перпендикулярно его плоскомти. Поле от леврго отрезка, соответственно, наоборот. Т.о., в центре дуги магнитное поле будет только от полукруглого участка провода. Вектор индукции направлен вглубь рисунка и равен $B = \mu_o I/4R$ (половина поля от полного кольца).

Если в этом поле перпендикулярно его силовым линиям движется проводник со скоростью V, то между любыми двумя точками этого проводника индуцируется разность потенциалов $U = BVl \sin\alpha$. Здесь $l$ – длина воображаемого отрезка, соединяющего эти точки, $\alpha$ – угол между этим отрезком и вектором скорости. По правилу левой руки в нашем случае наибольшая разность потенциалов возникнет:

**Ответ:** между левой (+) и правой (-) точками шарика: $U_{max} = \mu_o IVr/2R$.

ЗАДАЧА № 9

На рисунке схематично (т.е., без соблюдения точных угловых соотношений) в общем виде показан примерный ход светового луча сквозь призму. Она изготовлена из материала с показателем преломления $n$ и имет преломляющй угол при вершине $\alpha$. Прошедший сквозь призму луч отклоняется от исходного направления на некоторый угол $\varphi$, определяемый указанными свойствами призмы и углом падения луча.




– По заданному значению преломляющего угла призмы ($\alpha$) определить максимально возможное значение показателя преломления ($n_{max}$), при котором луч света сможет пройти призму насквозь.

– На какой максимальный угол ($\varphi_{max}$) можно отклонить луч, пропустив его через призму, если ее преломляющий угол равен $\alpha$, а показатель преломления $n$ ($n < n_{max}$)?

Ответ дать в общем виде и конкретно для случая $n = 1{,}836$, $\alpha = 30^{o}$. Для этого воспользуйтесь «инженерным» калькулятором (с функциями).

Решение.

Из соображений симметрии ясно, что угол преломления луча призмой ($\varphi$) достигает своего максимального значения тогда, когда входящий и выходящий лучи ориентированы симметрично относительно призмы. Понятно, что при этом луч внутри призмы идет параллельно основанию (точнее – перпендикулярно биссектрисе преломляющего угла $\alpha$) и, тем самым, образует с каждой из плоскостей угол $\alpha/2$.

Угол преломления будет тем больше, чем больше показатель преломления материала призмы ($n$). В предельном случае входящий и выходящий лучи скользят вдоль поверхности призмы. Это значит, что угол падения ($\beta_1$) будет прямым. Тогда угол преломления ($\beta_2 = \alpha/2$) окажется равным углу полного внутреннего отражения ($\sin\beta_2 = 1/n$). Этих соображений и элементарных геометрических построений вполне достаточно, чтобы получить

**Ответ:** $n_{max} = 1/\sin(\alpha/2)$; $\varphi_{max} = \arcsin[n\cdot\sin(\alpha/2)] - \alpha = 26{,}7^{o}$.