

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2016/2017 учебный год.

Задания для 6-7 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

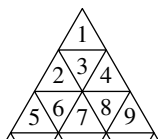
**Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2016/2017 учебный год. 6 – 7 классы.**

Вариант 1

1. Докажите следующий признак делимости: число 1207 делится на двузначное число x в том и только том случае, когда сумма кубов цифр числа x равна 344.

Решение. Заметим, что $1207 = 17 \cdot 71$. Так как числа 17 и 71 простые, только они и будут двузначными делителями 1207. У обоих чисел сумма кубов цифр равна 344. Обратно, сумма кубов двух цифр равна 344 только тогда, когда эти цифры 1 и 7. \square

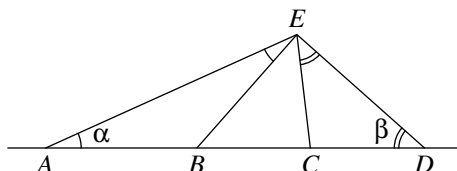
2. Угол разбит на треугольнички со стороной 1 см так, как показано на рисунке. В них по строкам слева направо расставляют натуральные числа, начиная с 1. Таня отметила горизонтальный отрезок, который является общей стороной двух треугольничков. В одном из них стоит число 267. Какое число стоит в другом треугольничке?



Ответ: 301.

Решение. Как нетрудно заметить, в k -й строке угла расположены числа от $(k-1)^2 + 1$ до k^2 . Число 267 расположено в 17-й строке (в ней находятся числа от 257 до 289). При нечетном k треугольнички, прилегающие к нечетным числам, располагаются строчкой ниже. Под числом 257 находится 291. Сдвигаясь в обеих строках на 10 позиций вправо, мы получим, что под числом 267 находится 301. \square

3. На прямой расположены точки A, B, C, D (именно в таком порядке). На плоскости, содержащей эту прямую, отмечена точка E . Оказалось, что $AB = BE$ и $EC = CD$. Докажите, что угол AED тупой.



Решение. Пусть $\alpha = \angle BAE = \angle AEB$, $\beta = \angle CDE = \angle CED$. Тогда

$$180^\circ = \angle AED + \alpha + \beta > 2\alpha + 2\beta.$$

Отсюда $\alpha + \beta < 90^\circ$ и $\angle AED > 90^\circ$. \square

4. Барон Мюнхгаузен утверждает, что существуют два таких различных 10-значных числа, не делящихся на 10, что если к каждому из этих чисел добавить сумму цифр его квадрата, результаты будут одинаковы. Не обманывает ли барон?

Ответ: не обманывает.

Решение. Примерами таких чисел могут быть $10^9 + 7$ и $10^9 + 8$. Действительно, квадрат первого числа равен

$$(10^9 + 7)^2 = 10^{18} + 14 \cdot 10^9 + 49 = 1 \cdot 10^{18} + 1 \cdot 10^{10} + 4 \cdot 10^9 + 4 \cdot 10 + 9,$$

и сумма его цифр равна 19. Квадрат второго числа равен

$$(10^9 + 8)^2 = 10^{18} + 16 \cdot 10^9 + 64 = 1 \cdot 10^{18} + 1 \cdot 10^{10} + 6 \cdot 10^9 + 6 \cdot 10 + 4,$$

и сумма его цифр равна 18. При этом первое число на 1 меньше второго. \square

5. Все трехзначные числа от 100 до 999 написаны подряд без пробелов. Костя подчеркнул k цифр, расположенных подряд в этой записи, Андрей подчеркнул другие k цифр, расположенных подряд в этой записи. Оказалось, что k -значные числа, подчеркнутые мальчиками, равны. При каком наибольшем k такое могло произойти?

Ответ: $k = 5$.

Решение. Примером пятизначного числа, удовлетворяющего условию задачи, является 22923. Действительно, Костя мог подчеркнуть фрагмент «22923» на стыке чисел 229 и 230, а Андрей — на стыке чисел 922 и 923.

Покажем теперь, что шестизначный фрагмент выбрать не удастся. Отметим вначале два очевидных факта.

1) Если у двух последовательных трехзначных чисел различаются средние цифры, то меньшее число оканчивается на 9, а большее — на 0.

2) Если у двух последовательных трехзначных чисел различаются старшие цифры, то меньшее число оканчивается на 99, а большее — на 00.

Предположим, что мальчики подчеркнули шестизначный фрагмент « $abcdef$ ». Его можно выделить в строке одним из трех способов, показанных на диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{abc} & \underbrace{def} & \\ i & i+1 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} * & * & a & b & c & d & e & f & * \\ & & \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} & \\ & & j & j+1 & j+2 & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} * & a & b & c & d & e & f & * & * \\ & \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} & \underbrace{} & & \\ & k & k+1 & k+2 & & & & & \end{array}$$

(здесь i, j, k — трехзначные числа, а звездочки обозначают некоторые цифры). Заметим, что Костя и Андрей использовали разные способы, иначе бы они подчеркнули один и тот же блок. Допустим, что Костя выбрал свой блок третьим способом. Тогда b и e — младшие цифры соседних чисел k и $k+1$, поэтому они различны. Если Андрей использовал вторую конфигурацию, то числа $j+1$ и $j+2$ имеют разные старшие цифры. В силу 2) число $j+2$ оканчивается на 00 и, в частности, $f = 0$. Если же Андрей использовал первую конфигурацию, то числа i и $i+1$ имеют разные средние цифры, и $f = 0$ в силу 1). Но $f \neq 0$, поскольку число $k+2$ трехзначное. Случай, когда мальчики использовали первые две конфигурации, разбирается аналогично. \square

6. Есть n министров, каждый из них выпустил (уникальный) приказ. Чтобы ознакомить всех с приказами, министры посылают друг другу телеграммы. Никакие две телеграммы не могут пересылаться одновременно. Когда министр получает телеграмму, он сразу же ее читает. Посылая телеграмму, министр включает в нее свой приказ, а также все известные ему в этот момент приказы других министров.

После пересылки некоторого количества телеграмм оказалось, что все министры ознакомились со всеми приказами. Кроме того, ни один министр не получал никакой чужой приказ более чем в одной телеграмме. При этом некоторые министры получали телеграммы, где среди прочего был приведен и их собственный приказ. Докажите, что таких министров было не меньше $n-1$.

Решение. Если министров всего два, утверждение очевидно: тот министр, который первым отправил телеграмму, получит затем приказ второго вместе со своим. Предположим, что для $n-1$ министра утверждение доказано, и проверим его для n министров. Пусть последняя из телеграмм была послана министром A министру B . Очевидно, министр A к этому моменту уже знает все приказы. Отсюда вытекают два следствия.

1) Министр B — один из тех, кто прочел свой приказ в телеграмме (полученной от A).

2) Министр B до получения телеграммы от A не знал ни одного приказа, кроме своего собственного (иначе какой-то приказ он узнал бы из телеграммы A во второй раз). Значит, ранее министр B не получал ни одной телеграммы, а только посылал.

Из 2) следует, что B сообщил остальным министрам только свой приказ. Тогда, уволив министра B и аннулировав его телеграммы, мы получим, что оставшиеся министры тоже удовлетворяют условию задачи. По предположению среди них по крайней мере $n-2$ получали в телеграммах свой приказ. В силу 1) вместе с B таких министров будет не менее $n-1$. \square

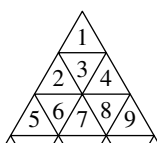
Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2015/2016 учебный год. 6 – 7 классы.

Вариант 2

1. Докажите следующий признак делимости: число 2701 делится на двузначное число x в том и только том случае, когда сумма квадратов цифр числа x равна 58.

Решение. Заметим, что $2701 = 37 \cdot 73$. Так как числа 37 и 73 простые, только они и будут двузначными делителями 2701. У обоих чисел сумма квадратов цифр равна 58. Обратно, сумма квадратов двух цифр равна 58 только тогда, когда эти цифры 3 и 7. \square

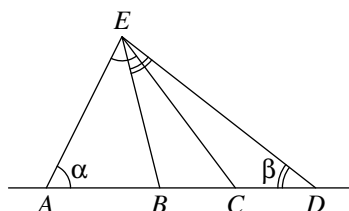
2. Угол разбит на треугольнички со стороной 1 см так, как показано на рисунке. В них по строкам слева направо расставляют натуральные числа, начиная с 1. Таня отметила горизонтальный отрезок, который является общей стороной двух треугольничков. В одном из них стоит число 350. Какое число стоит в другом треугольничке?



Ответ: 314.

Решение. Как нетрудно заметить, в k -й строке угла расположены числа от $(k-1)^2 + 1$ до k^2 . Число 350 расположено в 19-й строке (в ней находятся числа от 325 до 361). При нечетном k треугольники, прилегающие к четным числам, располагаются строчкой выше. Над числом 360 находится 324. Сдвигаясь в обеих строках на 10 позиций влево, мы получим, что над числом 350 находится 314. \square

3. На прямой расположены точки A, B, C, D (именно в таком порядке). На плоскости, содержащей эту прямую, отмечена точка E . Оказалось, что $AC = CE$ и $EB = BD$. Докажите, что угол AED острый.



Решение. Пусть $\alpha = \angle CAE = \angle AEC$, $\beta = \angle BDE = \angle BED$. Тогда

$$180^\circ = \angle AED + \alpha + \beta < 2\alpha + 2\beta.$$

Отсюда $\alpha + \beta > 90^\circ$ и $\angle AED < 90^\circ$. \square

4. Барон Мюнхгаузен утверждает, что существуют два таких различных 10-значных числа, не делящихся на 10, что если из каждого из этих чисел вычесть сумму цифр его квадрата, результаты будут одинаковы. Не обманывает ли барон?

Ответ: не обманывает.

Решение. Примерами таких чисел могут быть $10^9 + 8$ и $10^9 + 9$. Действительно, квадрат первого числа равен

$$(10^9 + 8)^2 = 10^{18} + 16 \cdot 10^9 + 64 = 1 \cdot 10^{18} + 1 \cdot 10^{10} + 6 \cdot 10^9 + 6 \cdot 10 + 4,$$

и сумма его цифр равна 18. Квадрат второго числа равен

$$(10^9 + 9)^2 = 10^{18} + 18 \cdot 10^9 + 81 = 1 \cdot 10^{18} + 1 \cdot 10^{10} + 8 \cdot 10^9 + 8 \cdot 10 + 1,$$

и сумма его цифр равна 19. При этом первое число на 1 меньше второго. \square

5. Все четырехзначные числа от 1000 до 9999 написаны подряд без пробелов. Костя подчеркнул k цифр, расположенных подряд в этой записи, Андрей подчеркнул другие k цифр, расположенных подряд в этой записи. Оказалось, что k -значные числа, подчеркнутые мальчиками, равны. При каком наибольшем k такое могло произойти?

Ответ: $k = 7$.

Решение. Примером семизначного числа, удовлетворяющего условию задачи, является 2229223. Действительно, Костя мог подчеркнуть фрагмент «2229223» на стыке чисел 2229 и 2230, а Андрей — на стыке чисел 9222 и 9223.

Покажем теперь, что восьмизначный фрагмент выбрать не удастся. Отметим вначале очевидный факт: если у двух последовательных четырехзначных чисел различаются предпоследние цифры, то меньшее число оканчивается на 9, а большее — на 0. Предположим, что мальчики подчеркнули восьмизначный фрагмент « $abcdefgh$ ». Его можно выделить в строке одним из четырех способов, показанных на диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccccc} \underbrace{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h}_{i\ \quad\quad i+1} & \underbrace{*a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ *}_{j\ \quad\quad j+1\ \quad\quad j+2} & \underbrace{*a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ *}_{k\ \quad\quad k+1\ \quad\quad k+2} & \underbrace{*a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ *}_{m\ \quad\quad m+1\ \quad\quad m+2} \end{array}$$

(здесь i, j, k, m — четырехзначные числа, а звездочки обозначают некоторые цифры). Заметим, что Костя и Андрей использовали разные способы, иначе бы они подчеркнули один и тот же блок. Допустим, что Костя выбрал свой блок первым способом, а Андрей — вторым. Тогда c и g — младшие цифры соседних чисел j и $j + 1$, поэтому они различны. Значит, числа i и $i + 1$ имеют разные предпоследние цифры. По замечанию выше число $i + 1$ оканчивается на 0, то есть $h = 0$. Но это невозможно, поскольку число $j + 2$ четырехзначное. Другие конфигурации разбираются аналогично. \square

6. У каждого из n химиков в лаборатории есть 1 кг некоторого химического реактива (у разных химиков — разные реактивы). Химики шлют друг другу посылки. Никакие две посылки не могут пересылаться одновременно. Получив посылку, химик сразу же добавляет в свою лабораторию все ее содержимое. Когда химик шлет посылку другому химику, он кладет в нее половину каждого из имеющихся у него реактивов.

После пересылки некоторого количества посылок оказалось, что у каждого химика теперь есть все n реактивов (быть может, в очень малых количествах). Кроме того, ни один химик не получал никакой чужой реактив более чем в одной посылке. При этом некоторые химики получали посылки, содержавшие среди прочего и их собственный реактив. Докажите, что таких химиков было не меньше $n - 1$.

Решение. Если химиков всего два, утверждение очевидно: тот химик, который первым отправил посылку, получит затем реактив второго вместе со своим. Предположим, что для $n - 1$ химиков утверждение доказано, и проверим его для n химиков. Пусть последняя из посылок была отправлена химиком A химику B . Очевидно, химик A уже имеет все реактивы в своей лаборатории. Отсюда вытекают два следствия.

1) Химик B — один из тех, кто получал свой реактив в посылке (от A).

2) Химик B до получения посылки от A не имел ни одного реактива, кроме своего собственного (иначе какой-то из реактивов он получил бы от A во второй раз). Значит, ранее химик B не получал ни одной посылки, а только отправлял их.

Из 2) следует, что химик B посылал коллегам только свой реактив. Тогда, удалив химика B из коллектива и изъяв его посылки, мы получим, что оставшиеся химики тоже удовлетворяют условию задачи. По предположению среди них по крайней мере $n - 2$ получали в посылках свой реактив. В силу 1) вместе с B таких химиков будет не менее $n - 1$. \square