Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2016/2017 учебный год

Задания для 10-11 классов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2016/2017 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Если две стороны первого треугольника соответственно равны двум сторонам второго треугольника и угол, противолежащий одной из этих сторон в первом треугольнике, равен углу, противолежащему соответственно равной ей стороне во втором треугольнике, то эти треугольники*

а) равны

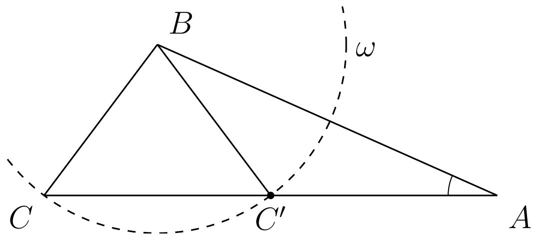
б) не равны

в) могут быть равны, а могут быть и не равны

г) могут иметь равные площади

Ответ: *в)* и *г)*.

Решение:



Треугольники, о которых говорится в условии, очевидно, могут быть равны, например, в случае, если они равносторонние. При этом равные треугольники имеют равные площади, поэтому вариант ответа г) нам подходит.

Треугольники ABC и ABC', показанные на рисунке, удовлетворяют условию, но, очевидно, не равны (ω — окружность с центром в точке B). Поэтому вторым правильным вариантом ответа является в).

2. (10 баллов) *Выберите верные высказывания, считая, что A — это площадь квадрата с диагональю $2\sqrt{2}$, B — площадь прямоугольника, у которого центр и две соседние вершины имеют координаты $(2, 2)$, $(4, 1)$ и $(4, 3)$ соответственно, C — площадь треугольника, образованного осями координат и прямой $y = -x/2 + 2$.*

а) $A < B$ или $B < C$.

б) $A = C$ и $B < C$.

в) $C < A < B$.

г) $A = C$ *или* $C < B$.

Ответ: *а)* и *г)*.

Решение: Нетрудно видеть, что

- $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$;
- координатами двух оставшихся вершин прямоугольника будут $(0,\,3)$ и $(0,\,1)$ — это координаты точек, симметричных точкам $(4,\,1)$ и $(4,\,3)$ относительно точки $(2,\,2)$, поэтому $B = 8$;
- прямая $y = -x/2 + 2$ пересекает ось ординат в точке $(0,\,2)$, а ось асбцисс — в точке $(4,\,0)$, следовательно, $C = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$.

Отсюда получаем, что в высказывании а) верно первое неравенство, поэтому все высказывание верно; в высказывании б) первое условие верно, но неверно второе, поэтому всё высказывание целиком — неверно; высказывание в), очевидно, неверно; в высказывании г) верно и равенство, и неравенство, поэтому все высказывание целиком тоже верно.

3. (20 баллов) *Юный маркетолог Маша должна была в течение дня опросить 50 покупателей в магазине бытовой техники. Однако в этот день покупателей в магазине оказалось меньше. Какое максимальное число покупателей могла опросить Маша, если по ее данным 7 человек из опрошенных совершили спонтанную покупку, 75% от оставшегося числа респондентов приобрели технику под влиянием рекламы, а число покупателей, которые выбрали товар по совету продавца-консультанта, составляет треть от числа выбравших товар под влиянием рекламы.*

Ответ: 47.

Решение: Пусть число опрошенных покупателей есть x. Тогда под влиянием рекламы покупку совершили $(x-7)\cdot 3/4$ покупателей, а по совету продавца-консультанта — $(x-$ $-\,7)/4$ покупателей. Поскольку число покупателей может быть только целым, то $x - 7$ должно делиться на 4. Максимальное подходящее число x, меньшее 50, — это 47.

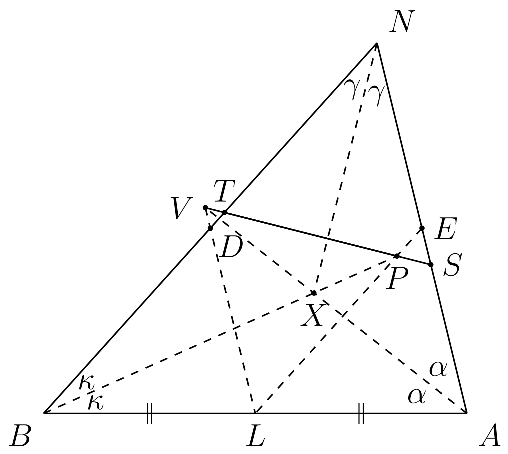
4. (20 баллов) *Залом для приёмов во дворце тритринадцатого царства являются точки плоскости, координаты которых удовлетворяют условию* $4|x| + 5|y| \leqslant 20$. *Сколько потребуется одинаковых плиток двухстороннего паркета, имеющих форму прямоугольного треугольника с катетами 1 и 5/4, чтобы замостить пол в зале? Замощением считается укладка без пустот, без наложений, не выходящая за границы области.*

Ответ: 64.

Решение: Нетрудно видеть, что зал для приёмов — это ромб с вершинами в точках $(-5,\,0)$, $(0,\,4)$, $(5,\,0)$ и $(0,\,-4)$ и каждая четверть зала (ограниченная осями координат и одной из сторон, т.е. являющаяся прямоугольным треугольником) подобна одной плитке паркета с коэффициентом 4. Таким образом, для замощения зала потребуется $4 \cdot 4^2 = 64$ плитки.

5. (30 баллов) *Середины сторон BA, AN, NB треугольника NBA обозначены точками L, E и D соответственно, а точка пересечения биссектрис треугольника NBA — через X. P — точка пересечения прямых BX и EL, V — прямых AX и DL, а в точках T и S прямая PV пересекает стороны NB и NA соответственно. Докажите, что треугольник NTS равнобедренный.*

Решение:



Так как $EL \parallel NB$, то $\angle LPB = \angle PBD$, но $\angle PBD = \angle PBL$ по условию, поэтому треугольник LBP равнобедренный с $LB = LP$.

Аналогично, треугольник LAV равнобедренный с $LA = LV$. Следовательно, равнобедренным является и треугольник LPV ($LP = LV$), поскольку точка L — середина BA.

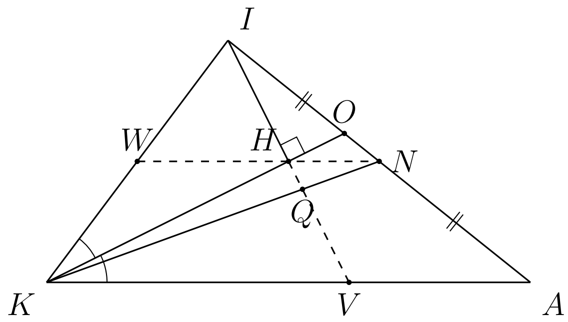
Остается заметить, что треугольник NTS подобен треугольнику LVP ($\angle NTS = \angle TPL$ как накрест лежащие при параллельных прямых LE и BN, а $\angle NST = \angle SVL$ как накрест лежащие при параллельных прямых LD и AN) и, следовательно, также является равнобедренным.

6. (30 баллов) *В треугольнике KIA, у которого сторона KI меньше стороны KA, биссектриса угла K пересекает сторону IA в точке O. Пусть N — середина IA, а H — основание высоты, опущенной из вершины I на отрезок KO. Прямая IH пересекает отрезок KN в точке Q. Докажите, что OQ и KI параллельны.*

Решение: Пусть IQ пересекает сторону KA в точке V. В треугольнике KIV высота KH является также и биссектрисой, а, следовательно, и медианой, поэтому $IH = HV$. Поэтому HN — средняя линия треугольника IVA и $HN \parallel AK$.

Обозначим через W точку пересечения NH и KI. Получаем, что NW — средняя линия треугольника KIA, а, следовательно, и медиана треугольника KHI. Тогда в последнем чевианы IQ и KO пересекаются на медиане, а тогда $OQ \parallel KI$.

7. (40 баллов) *Среди пенсионерок одной из планет Тау Кита распространено следующее времяпрепровождение: доска в клетку размером 2016 на 2017 раскрашивается золо-*



той и серебряной красками в шахматном порядке, после чего в вершинах каждой из клеток записываются числа 0 или 1 таким образом, чтобы сумма чисел в вершинах любой золотой клетки была бы четной, а в вершинах любой серебряной клетки – нечетной. Какой может получиться сумма чисел, записанных в четырёх вершинах самой доски?

Ответ: 0, 2 или 4.

Решение: Сложив суммы чисел в вершинах всех клеток, получим четное число, так как вся доска состоит из четного числа клеток. Поскольку все вершины, кроме угловых, при этом учтены четное число раз, а угловые — по разу, сумма чисел в вершинах угловых клеток четна. Значит, она равна 0, 2 или 4. Осталось построить соответствующие примеры. Заметим, что если записать во все вершины клеток на левой и верхней сторонах доски нули и единицы произвольным образом, то дальше, последовательно двигаясь слева направо по строкам, начиная с верхней, можно заполнить числами все вершины с соблюдением условия задачи. Для построения примера с суммой угловых клеток, равной 0, достаточно начать с набора из одних нулей, а для построения двух других примеров заменить в нем единицей нуль в одной или трех угловых клетках соответственно.

8. (40 баллов) *На базу "Горизонт" приехало 175 студентов университета. Кто-то из них знакомы друг с другом, а кто-то — нет. Известно, что любых шестерых студентов можно расселить по двум трехместным комнатам так, что все, оказавшиеся в одной комнате, будут знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых студентов могло оказаться среди приехавших на базу?*

Ответ: 15050.

Решение: Ясно, что у каждого студенты есть не более трех незнакомых. Если их у каждого студента не более двух, то каждый знаком с не менее чем 172 студентами и всего пар знакомых не меньше, чем $175 \times 172/2 = 15050$. Пусть нашелся студент A, у которого есть трое незнакомых B_1, B_2 и B_3. Рассмотрим шестерку студентов: A, B_1, B_2, B_3 и еще двоих произвольных студентов C и D. Их можно расселить по двум трехместным комнатам, поэтому A должен оказаться в одной комнате с C и D и, значит, C и D знакомы между собой и знакомы с A. Значит, любые два студента, отличные от B_1,

B_2 и B_3, между собой знакомы. В частности, если какой-то студент, отличный от B_1, B_2 и B_3, с кем-то незнаком, то этот кто-то — один из B_1, B_2 и B_3. Но каждый из B_i не знаком не более чем с тремя студентами, поэтому пар незнакомых студентов оказывается не больше девяти. Значит, в этом случае пар знакомых студентов не меньше, чем $175 \cdot 174/2 - 9 = 15216 > 15050$. Покажем теперь, что 15050 пар студентов может быть. Посадим всех студентов за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом. Несложно проверить, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи.