Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2016/2017 учебный год. 10 – 11 классы.

Вариант 1

1. *Ожерелье состоит из 30 синих и некоторого количества красных бусинок. Известно, что с двух сторон от каждой синей бусинки находятся разноцветные бусинки, а через одну от каждой красной — также разноцветные бусинки. Сколько красных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)*

   Ответ: 60.

   Решение. Очевидно, что синие бусинки встречаются в ожерелье парами, разделенными по крайней мере одной красной бусинкой. Пусть между двумя ближайшими парами синих бусинок находится n красных бусинок. Докажем, что $n = 4$. Ясно, что $n \leqslant 4$, поскольку средняя из пяти последовательных красных бусинок не удовлетворяет условию задачи. При $n < 4$ возможны три ситуации:

$$\text{ССКККСС}, \quad \text{ССККСС}, \quad \text{ССКСС}.$$

В первом случае условию не удовлеворяет средняя красная бусинка, в остальных — все красные бусинки.

Таким образом, пары синих бусинок должны разделяться четырьмя красными. Ясно, что такое ожерелье удовлетворяет условию задачи. В нем красных бусинок вдвое больше, чем синих, то есть их 60. □

2. *У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, стерли одну цифру. В результате число уменьшилось в 6 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.*

   Ответ: 108 или $12a$ при $a = 1, 2, 3, 4$.

   Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+1} n$, где a — десятичная цифра, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m < 10^k$. Стерев цифру a, мы получим число $m + 10^k n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} n = 6\left(m + 10^k n\right) \Longleftrightarrow 5m = 10^k\,(a + 4n).$$

Заметим, что $k > 0$, иначе $m = 0$ и $n = a = 0$. Тогда равенство примет вид $m = 10^{k-1}(2a + 8n)$. В силу условия число m оканчивается не на 0 и потому не делится на 10. Значит, $k = 1$ и $m = 2a + 8n$, причем $m < 10$. Поэтому возможны два случая.

1) $n = 0$. Тогда $m = 2a$, а исходное число равно $12a$, где $a \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2) $n = 1$. Тогда $a = 0$, $m = 8$, а исходное число равно 108. □

3. *Даны вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \left(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n\right) \cdot \left(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n\right).$$

   Ответ: $\frac{n^2}{2}$.

   Решение. Заметим, что при любых $a_1, \ldots, a_n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

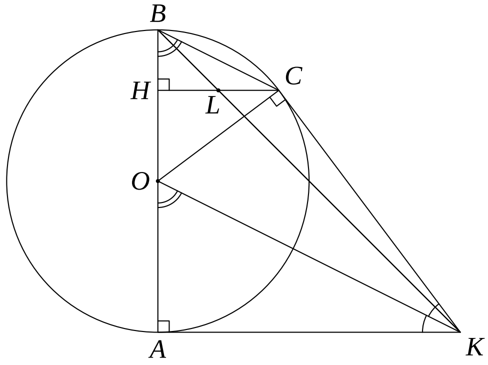
Отсюда в силу неравенства Коши

$$A \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \sin x_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \cos x_k\right)^2\right) \leqslant \frac{n}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \sin^2 x_k + \sum_{k=1}^{n} \cos^2 x_k\right) = \frac{n^2}{2}.$$

Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{\pi}{4}$. □

4. *На отрезке AB длины 10 как на диаметре построена окружность ω. Через точку A проведена касательная к ω, на которой выбрана точка K. Через точку K проведена прямая, отличная от AK, касающаяся окружности ω в точке C. Высота CH треугольника ABC пересекает отрезок BK в точке L. Найдите площадь треугольника CKL, если известно, что $BH : AH = 1 : 4$.*

Ответ: 8.



Решение. Пусть O — центр ω. Заметим, что

$$BH = \tfrac{1}{5}\,AB = 2, \quad AH = 8, \quad OH = \tfrac{1}{2}\,AB - BH = 3, \quad CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = 4.$$

Прямоугольные треугольники BHC и OAK подобны, поскольку

$$\angle ABC = \tfrac{1}{2}\,\angle AOC = \tfrac{1}{2}\bigl(180^\circ - \angle AKC\bigr) = 90^\circ - \angle AKO = \angle AOK.$$

Тогда

$$\frac{AB}{AK} = 2\cdot\frac{AO}{OK} = 2\cdot\frac{BH}{CH} = 1,$$

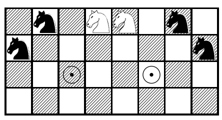
откуда $\angle ABK = 45^\circ$ и $LH = BH = 2$. Поэтому

$$S_{CKL} = \tfrac{1}{2}\cdot CL\cdot AH = \tfrac{1}{2}\cdot(CH - LH)\cdot AH = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 8 = 8. \quad \square$$

5. *В каждой клетке шахматной доски стоит конь. Какое наименьшее число коней можно убрать с доски так, чтобы на доске не осталось ни одного коня, бьющего ровно трех других коней? (Конь бьет клетки, отстоящие от него на одну клетку по горизонтали и две по вертикали или наоборот.)*

Ответ: 8 коней.

Решение 1. Будем говорить, что конь *контролирует* клетку доски, если он бьет эту клетку или стоит на ней. Докажем вначале, что менее 8 коней убрать не удастся. Нам достаточно проверить, что с каждой половины доски придется снять не менее 4 коней. Рассмотрим для определенности верхнюю половину и отметим на ней шесть коней так, как показано на рисунке:



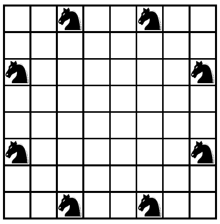
(для удобства они выделены разным цветом). Назовем клетки, отмеченные на рисунке кружочком, *кратными*, а остальные клетки — *простыми*. Разобьем рисунок на два квадрата 4×4 и зафиксируем один из них. Стоящие в квадрате черные кони бьют ровно по три клетки. Поэтому необходимо совершить одно из двух действий.

1) Убрать двух коней, стоящих на простых клетках, контролируемых черными конями (ими могут быть и сами черные кони).

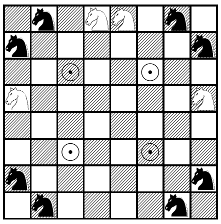
2) Убрать коня, стоящего на кратной клетке. В результате белый конь из этого квадрата будет бить ровно трех других коней. Значит, придется еще убрать коня с простой клетки, контролируемой белым конем (возможно, самого белого коня).

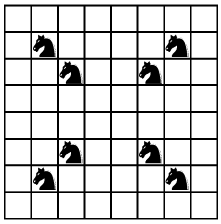
Те же действия необходимо проделать и для другого квадрата. Таким образом, каждый квадрат определяет пару клеток в верхней половине доски, с которых нужно убрать коней. Эти пары не пересекаются, поскольку никакие два отмеченных коня из разных квадратов не контролируют общих клеток. Иными словами, действия с квадратами производятся независимо друг от друга. Поэтому с верхней половины доски придется убрать не менее четырех коней.

Приведем пример, показывающий, что 8 коней достаточно. На рисунке отмечены кони, которых нужно снять с доски. □



Решение 2. Покажем вначале, что обязательно придется убрать не менее 8 коней. Отметим на доске 12 коней так, как показано на левом рисунке:





(для удобства они выделены разным цветом). Назовем клетку *полезной*, если она занята или бьется хотя бы одним черным конем, и *бесполезной* в противном случае. Если клетка бьется сразу двумя черными конями, она называется *ключевой* (на левом рисунке ключевые клетки отмечены кружочками). Разобьем доску на четыре квадрата 4×4. Поскольку черные кони бьют ровно три клетки на доске, справедливы два факта.

1) В каждом квадрате необходимо очистить хотя бы одну полезную клетку.

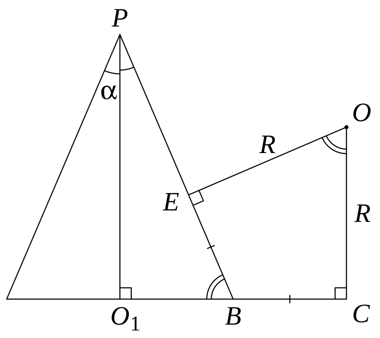
2) Если в каком-то квадрате освобождается ровно одна полезная клетка, то она обязательно ключевая. Предположим, что с доски можно убрать не более 7 коней. Тогда в каком-то квадрате будет снят ровно один конь. Пусть для определенности это левый верхний квадрат. В силу 2) конь должен быть снят с ключевой клетки, после чего белые кони из этого квадрата будут бить ровно по 3 коня. Значит, для каждого белого коня придется очистить еще по одной клетке. По предположению эти клетки не лежат в левом верхнем квадрате (и, тем самым, они различны). Значит, одна из клеток будет лежать в левом нижнем квадрате, другая — в правом верхнем. Очевидно, что обе они бесполезные.

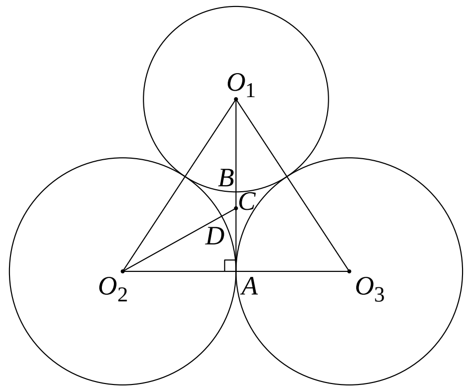
В силу 1) в левом верхнем и в правом нижнем квадратах есть хотя бы по одной очищенной клетке. Поэтому в правом верхнем и в левом нижнем квадратах будет всего освобождено не более пяти клеток. Тогда в каком-то из квадратов (например, правом верхнем) очищено не более двух клеток. Одна из них, как показано выше, бесполезная. Значит, в силу 1) и 2) будет освобождена и другая клетка, причем ключевая. После этого для белых коней, стоящих в правом верхнем квадрате, придется очистить еще две бесполезные клетки — одну в левом верхнем квадрате, другую в правом нижнем. В итоге мы освободим 4 бесполезные клетки (они различны, поскольку лежат в разных квадратах), а также в силу 1) не менее 4 полезных. Таким образом, всего будет удалено по крайней мере 8 коней, что невозможно.

Приведем теперь пример, показывающий, что 8 коней достаточно. На правом рисунке отмечены кони, которых нужно снять с доски. □

6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны* 1, 4 *и* 4, *а углы при вершине —* $4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $4\operatorname{arctg}\frac{9}{11}$ *и* $4\operatorname{arctg}\frac{9}{11}$ *соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). На стол положили шар, касающийся всех конусов. Найдите радиус шара.*

Ответ: $\frac{5}{3}$.





Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов, O — центр шара, R — радиус шара, C — точка касания шара со столом, 2α и 2β — углы при вершине первого и второго конусов. На левом рисунке показано сечение первого конуса плоскостью COO_1. Касание шара с первым конусом означает, что перпендикуляр OE, опущенный из точки O на образующую PB, равен R. Действительно, в этом случае шар и конус касаются плоскости, проходящей через образующую PB перпендикулярно сечению, и лежат по разные стороны от нее. Поэтому шар касается прямых BC и BE в точках C и E, откуда

$$OC = OE = R, \quad BC = BE \quad \text{и} \quad \angle BOC = \tfrac{1}{2}\angle EOC = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}.$$

Пусть B и D — точки пересечения отрезков CO_1 и CO_2 с основаниями конусов. Тогда

$$BC = R\cdot\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}\right) = R\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = R\cdot\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{R}{2}, \qquad CD = R\cdot\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\beta}{2}\right) = R\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{R}{10}.$$

На правом рисунке показано сечение конусов плоскостью стола. Заметим, что $AO_1 = 3$ и

$$\left(4+\tfrac{1}{10}R\right)^2 = CO_2^2 = AO_2^2 + AC^2 = AO_2^2 + \left(AO_1 - BO_1 - BC\right)^2 = 16 + \left(2-\tfrac{1}{2}R\right)^2 \iff 3R^2 - 35R + 50 = 0,$$

откуда $R = \frac{5}{3}$ или $R = 10$. Необходимо, чтобы шар касался образующих конусов, а не их продолжений за вершину. Это означает, что $R\cos\alpha \leqslant CO_1$ и $R\cos\beta \leqslant CO_2$. Первое условие эквивалентно

$$R\cos\alpha \leqslant BO_1 + BC \iff \tfrac{4}{5}R \leqslant 1 + \tfrac{1}{2}R \iff R \leqslant \tfrac{10}{3},$$

и ему удовлетворяет только $R = \frac{5}{3}$. Второе условие приводится к неравенству $\frac{20}{101}R \leqslant 4 + \frac{1}{10}R$, которое верно для $R = \frac{5}{3}$. $\square$

Вариант 2

1. *Ожерелье состоит из 175 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что у каждой красной бусинки разноцветные соседи, а на любом участке ожерелья между двумя зелёными бусинками есть хотя бы одна синяя. Какое наименьшее количество синих бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)*

   Ответ: 30.

   Решение 1. Покажем, что любой блок из шести последовательных бусинок содержит синюю бусинку. Можно считать, что в нем не более одной зеленой бусинки, иначе доказывать нечего. Если блок содержит 5 красных бусинок, то хотя бы 3 из них идут подряд, и средняя не удовлетворяет условию задачи. Поэтому в блоке не более четырех красных бусинок и, значит, есть синяя.

   Фиксируем в ожерелье синюю бусинку, а остальные разобьем на 29 блоков по 6 бусинок. По доказанному каждый блок содержит хотя бы одну синюю бусинку. Значит, всего их в ожерелье не менее 30.

   Осталось привести пример ожерелья, в котором синих бусинок ровно 30:

$$\text{ККЗККС; ККЗККС; \dots; ККЗККС (29 раз); С.} \quad \square$$

   Решение 2. Фиксируем какую-нибудь зеленую или синюю бусинку, а остальные разобьем на 58 троек, идущих подряд. Каждая тройка содержит не более двух красных бусинок, иначе средняя красная бусинка имела бы одноцветных соседей. Поэтому всего в ожерелье красных бусинок не более $2 \cdot 58 = 116$, а синих и зеленых бусинок вместе — не менее $175 - 116 = 59$. Мысленно уберем все красные бусинки и заметим, что синих бусинок теперь не меньше половины, так как между любыми двумя зелеными бусинками есть синяя. Значит, синих бусинок не менее $\frac{59}{2} = 29\frac{1}{2}$, то есть их по крайней мере 30.

   Осталось привести пример ожерелья, в котором синих бусинок ровно 30:

$$\text{ККЗККС; ККЗККС; \dots; ККЗККС (29 раз); С.} \quad \square$$

2. *У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 6 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.*

   Ответ: $12a$ при $a = 1, 2, 3, 4$.

   Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+1} n$, где a — десятичная цифра, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m < 10^k$. Заменив цифру a нулем, мы получим число $m + 10^{k+1} n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} n = 6\left(m + 10^{k+1} n\right) \iff 5m = 10^k (a - 50n).$$

Заметим, что $n = 0$, иначе m будет отрицательным. Кроме того, $k > 0$, в противном случае $m = 0$ и $a = 0$. Тогда равенство преобразуется к виду $m = 2a \cdot 10^{k-1}$. В силу условия число m оканчивается не на 0 и потому не делится на 10. Значит, $k = 1$, $m = 2a$, а исходное число равно $12a$. Так как $m < 10$, цифра a принимает значения 1, 2, 3, 4. $\square$

3. *Даны числа $x_1, \dots, x_n$ из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \left(\sqrt{\sin x_1} + \ldots + \sqrt{\sin x_n}\right) \cdot \left(\sqrt{\cos x_1} + \ldots + \sqrt{\cos x_n}\right).$$

   Ответ: $\frac{n^2}{\sqrt{2}}$.

   Решение. Заметим, что при любых $a_1, \dots, a_n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^4 \leqslant \left(n \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2 \leqslant n^3 \sum_{k=1}^{n} a_k^4.$$

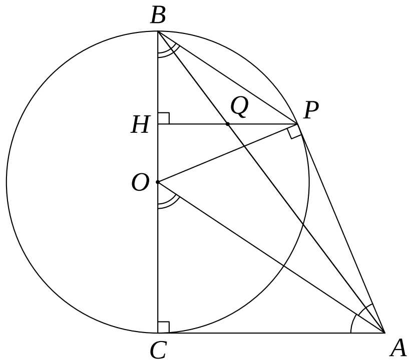
Отсюда в силу неравенства Коши

$$A^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sin x_k}\right)^4 + \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\cos x_k}\right)^4\right) \leqslant \frac{n^3}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k + \sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k\right) = \frac{n^4}{2}.$$

Поэтому $A \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{2}}$. Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{\pi}{4}$. $\square$

4. *Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На его катете BC длины 26 как на диаметре построена окружность. Из точки A к этой окружности проведена касательная AP, отличная от AC. Перпендикуляр PH, опущенный на отрезок BC, пересекает отрезок AB в точке Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH : CH = 4 : 9$.*

Ответ: 24.



Решение. Пусть O — центр ω. Заметим, что

$$BH = \tfrac{4}{13}\,BC = 8, \quad CH = 18, \quad OH = \tfrac{1}{2}\,BC - BH = 5, \quad PH = \sqrt{OP^2 - OH^2} = 12.$$

Прямоугольные треугольники BHP и OCA подобны, поскольку

$$\angle CBP = \tfrac{1}{2}\,\angle COP = \tfrac{1}{2}\left(180^\circ - \angle CAP\right) = 90^\circ - \angle CAO = \angle COA.$$

Тогда

$$\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{AC}{OC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{PH}{BH} = \frac{3}{4}.$$

Из подобия треугольников BHQ и BCA мы получаем $QH = \frac{3}{4}\,BH = 6$. Поэтому

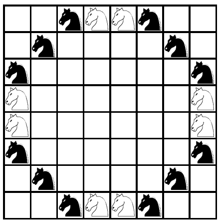
$$S_{BPQ} = \tfrac{1}{2}\cdot PQ\cdot BH = \tfrac{1}{2}\cdot(PH - QH)\cdot BH = \tfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24. \quad \square$$

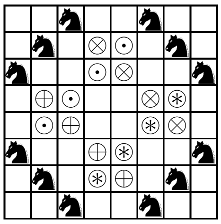
5. *В каждой клетке шахматной доски стоит конь. Какое наименьшее количество коней можно убрать с доски так, чтобы на доске не осталось ни одного коня, бьющего ровно четырех других коней? (Конь бьет клетки, отстоящие от него на одну клетку по горизонтали и две по вертикали или наоборот.)*

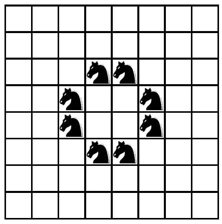
Ответ: 8 коней.

Решение. Покажем вначале, что снять придется не менее 8 коней. На левом рисунке отмечены все кони, которые бьют ровно 4 клетки доски (для удобства они выделены разными цветами). Назовем таких коней *плохими.* Чтобы конь перестал бить четырех других, нужно убрать с доски либо этого коня, либо одного из тех, кого он бьет. Покажем, что даже для того, чтобы избавиться от плохих черных коней, придется освободить не менее 8 клеток. На среднем рисунке кружочками отмечены клетки, находящиеся под боем плохих черных коней. Три плохих черных коня в левом верхнем углу бьют четыре клетки, отмеченные значком $\odot$. Если освободить лишь одну из этих клеток, то какой-то из черных коней останется плохим. Следовательно, для этой тройки коней необходимо очистить не менее двух клеток. Значит, для всех четырех троек нужно освободить не менее $4 \cdot 2 = 8$ клеток.

Приведем теперь пример, показывающий, что 8 коней достаточно. На правом рисунке отмечены кони, которых нужно снять с доски. $\square$

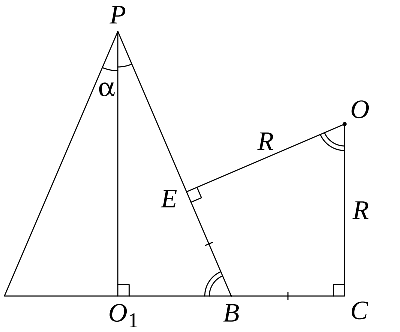


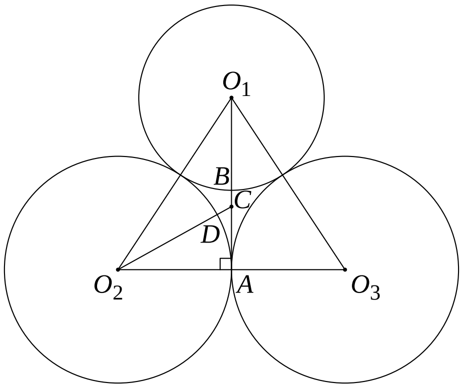




6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны* 1, 12 *и* 12, *а углы при вершине —* $4\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $4\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ *и* $4\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ *соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). На стол положили шар, касающийся всех конусов. Найдите радиус шара.*

Ответ: $\frac{40}{21}$.





Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов, O — центр шара, R — радиус шара, C — точка касания шара со столом, 2α и 2β — углы при вершине первого и второго конусов. На левом рисунке показано сечение первого конуса плоскостью COO_1. Касание шара с первым конусом означает, что перпендикуляр OE, опущенный из точки O на образующую PB, равен R. Действительно, в этом случае шар и конус касаются плоскости, проходящей через образующую PB перпендикулярно сечению, и лежат по разные стороны от нее. Поэтому шар касается прямых BC и BE в точках C и E, откуда

$$OC = OE = R, \quad BC = BE \quad \text{и} \quad \angle BOC = \tfrac{1}{2}\angle EOC = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}.$$

Пусть B и D — точки пересечения отрезков CO_1 и CO_2 с основаниями конусов. Тогда

$$BC = R \cdot \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}\right) = R \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = R \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{R}{2}, \qquad CD = R \cdot \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\beta}{2}\right) = R \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{R}{5}.$$

На правом рисунке показано сечение конусов плоскостью стола. Заметим, что $AO_1 = 5$ и

$$\left(12 + \tfrac{1}{5}R\right)^2 = CO_2^2 = AO_2^2 + \left(AO_1 - BO_1 - BC\right)^2 = 144 + \left(4 - \tfrac{1}{2}R\right)^2 \iff 21R^2 - 880R + 1600 = 0,$$

откуда $R = \frac{40}{21}$ или $R = 40$. Необходимо, чтобы шар касался образующих конусов, а не их продолжений за вершину. Это означает, что $R\cos\alpha \leqslant CO_1$ и $R\cos\beta \leqslant CO_2$. Первое условие эквивалентно

$$R\cos\alpha \leqslant BO_1 + BC \iff \tfrac{4}{5}R \leqslant 1 + \tfrac{1}{2}R \iff R \leqslant \tfrac{10}{3},$$

и ему удовлетворяет только $R = \frac{40}{21}$. Второе условие приводится к неравенству $\frac{5}{13}R \leqslant 12 + \frac{1}{5}R$, которое верно для $R = \frac{40}{21}$. $\square$

Вариант 3

1. *Ожерелье состоит из 100 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что среди любых пяти бусинок, идущих подряд, есть хотя бы одна синяя, а среди любых семи, идущих подряд, — хотя бы одна красная. Какое наибольшее количество зелёных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)*

   Ответ: 65.

   Решение. Пусть имеется такое множество бусинок A, что в каждом наборе из n последовательных бусинок есть хотя бы одна из A. Покажем, что в A не менее $\frac{100}{n}$ элементов. Действительно, между любыми двумя соседними бусинками из A находится не более $n-1$ бусинок. Если множество A содержит m элементов, то

$$100 \leqslant m + m\,(n-1) = mn, \quad \text{откуда} \quad m \geqslant \frac{100}{n}.$$

По доказанному число синих бусинок не меньше $\frac{100}{5} = 20$, а количество красных бусинок не меньше $\frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}$, то есть по крайней мере 15. Значит, число зеленых бусинок не больше $100 - 20 - 15 = 65$.

Приведем пример ожерелья, содержащего 65 зеленых бусинок. Разместим синие бусинки на позициях, кратных 5, а красные — на местах с номерами

$$1, 8, 14;\ 21, 28, 34;\ 41, 48, 54;\ 61, 68, 74;\ 81, 88, 94.$$

Остальные позиции заполним зелеными бусинками. □

2. *У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, стерли одну из цифр (не старшую). В результате число уменьшилось в 9 раз. Сколько существует чисел, для которых это возможно?*

   Ответ: 28.

   Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+1} n$, где a — десятичная цифра, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m < 10^k$ и $n > 0$. Стерев цифру a, мы получим число $m + 10^k n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} n = 9\left(m + 10^k n\right) \iff 8m = 10^k\,(a+n).$$

Заметим, что $k > 0$, иначе $m = 0$ и $a = n = 0$. Тогда число $8m$ кратно 10 и потому оканчивается на 0. В силу условия число m оканчивается не на 0. Значит, последняя цифра m равна 5 и число m нечетно. Поэтому $8m$ не делится на 16, откуда $k \leqslant 3$. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $k = 3$. Тогда $m = 125\,(a+n)$. Так как число m нечетно и меньше 1000, $a+n$ может принимать значения 1, 3, 5, 7. Заметим, что пара (a, n) однозначно определяет исходное число, а каждое значение $a+n$ дает $a+n$ различных пар. Таким образом, мы получаем $1+3+5+7 = 16$ вариантов.

2) Пусть $k = 2$. Тогда $m = 25 \cdot \frac{a+n}{2}$. Так как число m нечетно и меньше 100, $a+n$ равно 2 или 6. Эти значения дают нам $2+6 = 8$ вариантов.

3) Пусть $k = 1$. Тогда $m = 5 \cdot \frac{a+n}{4}$. Так как число m нечетно и меньше 10, мы получаем $a+n = 4$, что дает нам 4 варианта.

Заметим, что в 1) получатся четырехзначные числа, в 2) — трехзначные, в 3) — двузначные. Поэтому каждое число, удовлетворяющее условию задачи, входит ровно в один из наборов 1) – 3). Значит, общее количество вариантов равно $16+8+4 = 28$. □

3. *Числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяют условию $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant 2$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \big(2(x_1 + \ldots + x_n) - y_1 - \ldots - y_n\big) \cdot \big(x_1 + \ldots + x_n + 2(y_1 + \ldots + y_n)\big).$$

   Ответ: $5n$.

Решение 1. Для $k = 1, \ldots, n$ положим $t_k = 3x_k + y_k$, $s_k = x_k - 3y_k$. Тогда

$$4A = \bigl(4x_1 + \ldots + 4x_n - 2y_1 - \ldots - 2y_n\bigr) \cdot \bigl(2x_1 + \ldots + 2x_n + 4y_1 + \ldots + 4y_n)\bigr) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n}(3x_k + y_k) + \sum_{k=1}^{n}(x_k - 3y_k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(3x_k + y_k) - \sum_{k=1}^{n}(x_k - 3y_k)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} t_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\bigl(t_k^2 + s_k^2\bigr) = 10 \cdot \sum_{k=1}^{n}\bigl(x_k^2 + y_k^2\bigr) \leqslant 20,$$

откуда

$$4A \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n} t_k^2 \leqslant 20n.$$

Таким образом, $A \leqslant 5n$. Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{3}{\sqrt{5n}}$ и $y_1 = \ldots = y_n = \frac{1}{\sqrt{5n}}$. $\square$

Решение 2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{2n}$ векторы

$$\overline{a} = (2, \ldots, 2, -1, \ldots, -1), \quad \overline{b} = (1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2), \quad \overline{c} = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n).$$

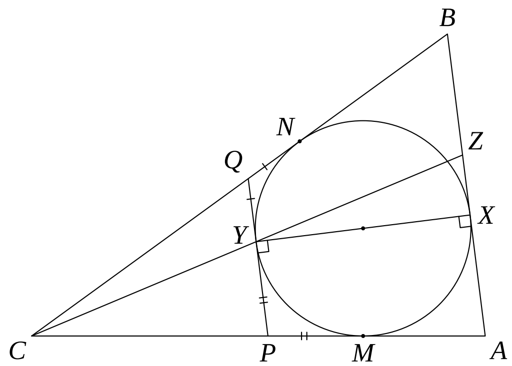
Заметим, что $|\overline{a}| = |\overline{b}| = \sqrt{5n}$, а длину $\overline{c}$ можно считать равной $\sqrt{2}$. Обозначим через α, β углы между $\overline{c}$ и векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$ соответственно. Тогда

$$A = 2 \cdot |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\alpha\cos\beta = 10n \cdot \cos\alpha\cos\beta.$$

Углы между $\overline{a}$, $\overline{b}$ и проекцией $\overline{c}$ на плоскость, порожденную этими векторами, не превосходят α, β соответственно. Поэтому можно считать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны. Так как $\overline{a} \perp \overline{b}$, мы получим $A = 10n \cdot \cos\alpha\sin\alpha$. Максимум этого выражения равен $5n$. $\square$

4. *В треугольник ABC вписана окружность ω радиуса r, которая касается стороны AB в точке X. На окружности отметили точку Y, диаметрально противоположную точке X. Прямая CY пересекает сторону AB в точке Z. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $CA + AZ = 1$.*

   Ответ: r.



Решение. Проведем через точку Y касательную к ω, пересекающую отрезки AC и BC в точках P и Q соответственно. Пусть M и N — точки, в которых ω касается сторон AC и BC соответственно. Заметим, что

$$CP + PY = CP + PM = CM = CN = CQ + QN = CQ + QY.$$

Прямые AB и PQ параллельны как перпендикуляры к одному диаметру. Поэтому треугольники CQY и CBZ, а также CPY и CAZ подобны с коэффициентом $k = \frac{CY}{CZ}$. Тогда

$$CB + BZ = k\,(CQ + QY) = k\,(CP + PY) = CA + AZ = 1,$$

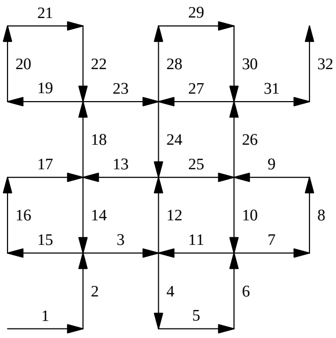
откуда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(CA + AB + BC) \cdot r = \frac{1}{2}(CA + AZ + BZ + CB) \cdot r = r. \quad \square$$

5. *Квадрат 4×4 разбит на 16 квадратов 1×1. Назовем путем перемещение по сторонам единичных квадратов, при котором ни одна из сторон не проходится дважды. Какую наибольшую длину может иметь путь, соединяющий две противоположные вершины большого квадрата?*

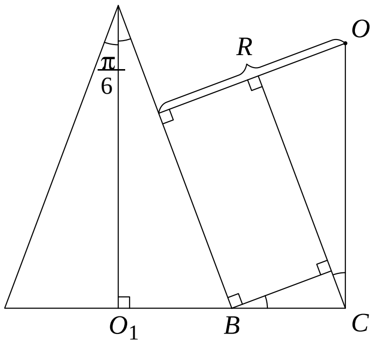
Ответ: 32.

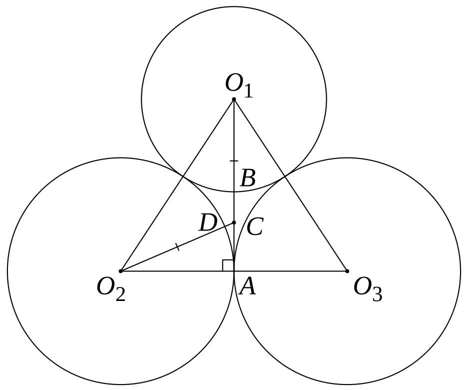
Решение. Назовем стороны квадратов 1×1 *ребрами*, вершины этих квадратов — *узлами*, а число ребер, примыкающих к узлу — *кратностью* узла. Заметим, что квадраты 1×1 порождают 40 различных ребер. Если путь проходит через узел кратности 3, то по одному ребру он приходит в узел, по другому — выходит из узла, а третье ребро, примыкающее к узлу, не может принадлежать пути. Рассмотрим тройку узлов кратности 3, лежащих на одной стороне квадрата 4×4. К каждому узлу прилегает ребро, свободное от пути (независимо от того, проходит путь через узел или нет), причем для несмежных узлов эти ребра различны. Значит, всего имеется не меньше $2 \cdot 4 = 8$ ребер, свободных от пути, а длина пути не превосходит $40 - 8 = 32$. Пример пути длины 32 показан на рисунке. $\square$



6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 32, 48 и 48, а углы при вершине — $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). Над столом подвесили шар, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от центров оснований всех конусов. Найдите радиус шара.*

Ответ: $13\left(\sqrt{3}+1\right)$.





Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов, O — центр шара, C — его проекция на стол, R — радиус шара. Точка C тоже равноудалена от O_1, O_2, O_3, то есть она является центром описанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ (см. правый рисунок). Пусть r — радиус этой окружности. Заметим, что

$$AO_1 = \sqrt{O_1O_2^2 - AO_2^2} = \sqrt{80^2 - 48^2} = 64,$$

откуда
$$r^2 - AO_2^2 = AC^2 = (AO_1 - r)^2 \Longleftrightarrow r^2 - 48^2 = r^2 - 128r + 64^2 \Longleftrightarrow r = 50.$$
Тогда $CB = 18$ и $CD = 2$, где B и D — точки пересечения отрезков CO_1 и CO_2 с основаниями конусов.

Касание шара с первым конусом означает, что перпендикуляр из точки O на образующую конуса, лежащую в плоскости COO_1, равен R (см. левый рисунок). Действительно, в этом случае шар и конус касаются плоскости, проходящей через эту образующую перпендикулярно COO_1, и лежат по разные стороны от нее. Поэтому
$$R = CB \cdot \cos\tfrac{\pi}{6} + OC \cdot \sin\tfrac{\pi}{6} \Longleftrightarrow OC = 2R - 18\sqrt{3}.$$
Применяя эти рассуждения к другому конусу, мы получим
$$R = CD \cdot \cos\tfrac{\pi}{3} + OC \cdot \sin\tfrac{\pi}{3} = 1 + \sqrt{3}\left(R - 9\sqrt{3}\right) \Longleftrightarrow R = 13\left(\sqrt{3} + 1\right).$$
Необходимо также проверить, что шар касается образующих конусов, а не их продолжений за вершину. Это равносильно условиям
$$R\cos\tfrac{\pi}{6} \leqslant CO_1 = r = 50 \quad \text{и} \quad R\cos\tfrac{\pi}{3} \leqslant 50,$$
которые, очевидно, выполняются. $\square$

Вариант 4

1. *На нитке надеты 150 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что среди любых шести бусинок, идущих подряд, есть хотя бы одна зеленая, а среди любых одиннадцати, идущих подряд, — хотя бы одна синяя. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть на нитке?*

   Ответ: 112.

   Решение. Мы можем выбрать $\left[\frac{150}{11}\right] = 13$ последовательных блоков по 11 бусинок. Так как каждый блок содержит хотя бы одну синюю бусинку, всего на нитке не менее 13 синих бусинок. Кроме того, мы можем сгруппировать все бусинки в 25 последовательных блоков по 6 бусинок. Каждый из блоков содержит хотя бы одну зеленую бусинку, поэтому всего их на нитке не менее 25. Значит, число красных бусинок не больше $150 - 25 - 13 = 112$.

Приведем пример, когда нитка содержит ровно 112 красных бусинок. Разместим зеленые бусинки на позициях, кратных 6, а синие — на местах с номерами

$$11, 22, 33, 44, 55;\ 65, 76, 87, 98, 109;\ 119, 130, 141.$$

Остальные позиции заполним красными бусинками. $\square$

2. *У натурального числа, оканчивающегося не на ноль, одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 9 раз. Сколько существует чисел, для которых это возможно?*

   Ответ: 7.

   Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+1} n$, где a — десятичная цифра, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m < 10^k$. Заменив цифру a нулем, мы получим число $m + 10^{k+1} n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} n = 9\left(m + 10^{k+1} n\right) \iff 8m = 10^k (a - 80n).$$

Заметим, что $n = 0$ (иначе m будет отрицательным), откуда $8m = 10^k a$. Таким образом, нулем заменяется старшая цифра исходного числа. Кроме того, $k > 0$, иначе $m = a = 0$. Тогда число $8m$ кратно 10 и потому оканчивается на 0. В силу условия число m оканчивается не на 0. Значит, последняя цифра m равна 5 и число m нечетно. Поэтому $8m$ не делится на 16, откуда $k \leqslant 3$. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $k = 3$. Тогда $m = 125a$. Так как число m нечетно и меньше 1000, цифра a может принимать значения 1, 3, 5, 7, что дает нам 4 варианта.

2) Пусть $k = 2$. Тогда $m = \frac{25a}{2}$. Так как число m нечетно и меньше 100, цифра a равна 2 или 6. Эти значения дают нам еще 2 варианта.

3) Пусть $k = 1$. Тогда $m = \frac{5a}{4}$. Так как число m нечетно и меньше 10, мы получаем $a = 4$.

Заметим, что в 1) получатся четырехзначные числа, в 2) — трехзначные, в 3) — двузначные. Поэтому каждое число, удовлетворяющее условию задачи, входит ровно в один из наборов 1) – 3). Значит, общее количество вариантов равно $4 + 2 + 1 = 7$. $\square$

3. *Числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяют условию $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + \ldots + y_n^2 \leqslant 1$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \big(3(x_1 + \ldots + x_n) - 5(y_1 + \ldots + y_n)\big) \cdot \big(5(x_1 + \ldots + x_n) + 3(y_1 + \ldots + y_n)\big).$$

   Ответ: $17n$.

   Решение. Для $k = 1, \ldots, n$ положим $t_k = 4x_k - y_k$, $s_k = x_k + 4y_k$. Тогда

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n}(4x_k - y_k) - \sum_{k=1}^{n}(x_k + 4y_k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(4x_k - y_k) + \sum_{k=1}^{n}(x_k + 4y_k)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} t_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(t_k^2 + s_k^2\right) = 17 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 + y_k^2\right) \leqslant 17,$$

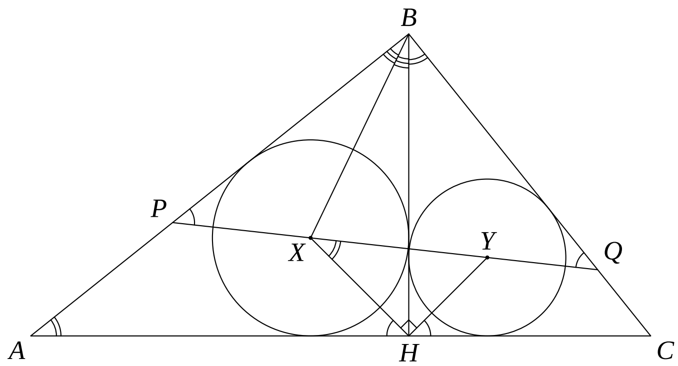
откуда

$$A \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} t_k^2 \leqslant 17n.$$

Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{4}{\sqrt{17n}}$ и $y_1 = \ldots = y_n = -\frac{1}{\sqrt{17n}}$. $\square$

4. *В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. Точки X и Y — центры окружностей, вписанных в треугольники ABH и CBH соответственно. Прямая XY пересекает катеты AB и BC в точках P и Q. Найдите площадь треугольника BPQ, если известно, что $BH = h$.*

   Ответ: $\frac{h^2}{2}$.



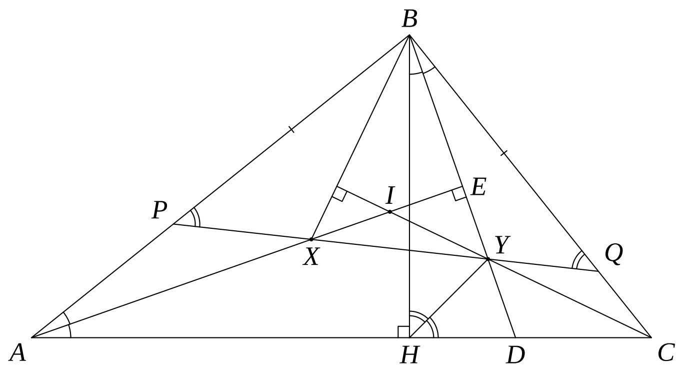
Решение 1. Прямые HX и HY — биссектрисы прямых углов AHB и BHC, откуда

$$\angle AHX = \angle BHX = \angle BHY = \angle CHY = 45^\circ \quad \text{и} \quad \angle XHY = 90^\circ.$$

Отрезки HX и HY относятся как радиусы окружностей, вписанных в подобные треугольники AHB и BHC, поэтому $\frac{HX}{HY} = \frac{AB}{BC}$. Значит, треугольники XHY и ABC подобны. Тогда

$$\angle BAC = \angle HXY = 180^\circ - \angle PXH,$$

и четырехугольник $AHXP$ будет вписанным. Следовательно, $\angle QPB = \angle AHX = 45^\circ$, то есть треугольник BPQ равнобедренный. Заметим, что треугольники PBX и HBX равны. Действительно, сторона BX у них общая, $\angle BPX = \angle BHX = 45^\circ$, а углы PBX и HBX равны, поскольку BX — биссектриса угла PBH. Тогда $BP = BH = h$ и $S_{BPQ} = \frac{BP^2}{2} = \frac{h^2}{2}$. $\square$



Решение 2. Обозначим через I центр вписанной окружности треугольника ABC. Покажем, что I — ортоцентр треугольника BXY. Пусть BD — биссектриса треугольника CBH, E — точка пересечения прямых AX и BY (см. рисунок). Тогда

$$\angle DAE = \tfrac{1}{2}\angle BAC = \tfrac{1}{2}\left(90^\circ - \angle ABH\right) = \tfrac{1}{2}\angle CBH = \angle DBH.$$

Таким образом, в треугольниках DAE и DBH имеются две пары одинаковых углов. Поэтому равны и их третьи углы, то есть $\angle AED = \angle BHD = 90^\circ$. Аналогично проверяется, что $YI \perp BX$. Значит, $BI \perp PQ$, поэтому луч BI будет одновременно биссектрисой и высотой треугольника BPQ. Следовательно, $\triangle BPQ$ равнобедренный, откуда $\angle BQP = 45^\circ$.

Заметим далее, что треугольники BHY и BQY равны, поскольку у них есть общая сторона BY и две пары одинаковых углов:

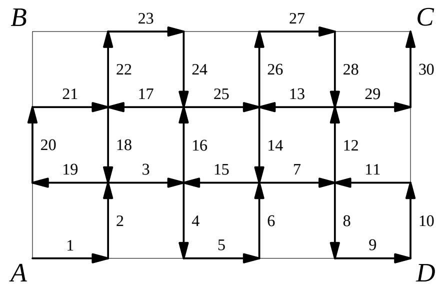
$$\angle HBY = \angle QBY \quad \text{и} \quad \angle BHY = \tfrac{1}{2}\angle BHC = 45^\circ = \angle BQY.$$

Поэтому $BP = BQ = BH = h$ и $S_{BPQ} = \frac{BQ^2}{2} = \frac{h^2}{2}$. $\square$

5. *Прямоугольник 3×5 разбит на 15 квадратов 1×1. Назовем путем перемещение по сторонам единичных квадратов, при котором ни одна из сторон не проходится дважды. Какую наибольшую длину может иметь путь, соединяющий две противоположные вершины прямоугольника?*

Ответ: 30.

Решение. Обозначим прямоугольник через $ABCD$, и пусть путь соединяет его вершины A и C. Назовем стороны квадратов 1×1 *ребрами*, вершины этих квадратов — *узлами*, а число ребер, примыкающих к узлу — *кратностью* узла. Заметим, что квадраты 1×1 порождают 38 различных ребер. Если путь проходит через узел кратности 3, то по одному ребру он приходит в узел, по другому — выходит из узла, а третье ребро, примыкающее к узлу, не может принадлежать пути. Пусть X — множество узлов, лежащих на ломаной BAD, за исключением точек B и D. Оно состоит из точки A и шести узлов кратности 3. Заметим, что точка A имеет кратность 2, а путь в нее не приходит. Поэтому к каждому узлу из X примыкает ребро, свободное от пути (независимо от того, проходит путь через даный узел или нет). Для несмежных узлов эти ребра заведомо разные, а пар смежных узлов не может быть больше 3. Значит, множество X дает не менее 4 ребер, свободных от пути. Те же рассуждения справедливы для ломаной BCD. Таким образом, всего имеется не меньше $2\cdot 4 = 8$ ребер, свободных от пути, а длина пути не превосходит $38 - 8 = 30$. Пример пути длины 30 показан на рисунке. $\square$



6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны 72, 28 и 28, а углы при вершине — $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно (углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении). Над столом подвесили шар, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от всех точек касания конусов. Найдите радиус шара.*

Ответ: $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов, O — центр шара, C — его проекция на стол, R — радиус шара. Точка C тоже равноудалена от точек касания оснований конусов, поэтому она лежит на пересечении биссектрис треугольника $O_1O_2O_3$ (см. правый рисунок). Значит, C является центром вписанной окружности $\triangle O_1O_2O_3$, а отрезок AC — радиус этой окружности. Заметим, что периметр треугольника $O_1O_2O_3$ равен 256 и

$$AO_1 = \sqrt{O_1O_2^2 - AO_2^2} = \sqrt{100^2 - 28^2} = 96,$$

откуда

$$AC = \frac{AO_2 \cdot AO_1}{128} = \frac{28 \cdot 96}{128} = 21.$$

Пусть B и D — точки пересечения отрезков CO_1 и CO_2 с основаниями конусов. Тогда

$$BC = AO_1 - AC - BO_1 = 96 - 21 - 72 = 3 \quad \text{и} \quad CD = \sqrt{AO_2^2 + AC^2} - DO_2 = \sqrt{28^2 + 21^2} - 28 = 7.$$

Касание шара с первым конусом означает, что перпендикуляр из точки O на образующую конуса, лежащую в плоскости COO_1, равен R (см. левый рисунок). Действительно, в этом случае шар и конус касаются плоскости, проходящей через эту образующую перпендикулярно COO_1, и лежат по разные стороны от нее. Поэтому

$$R = BC \cdot \cos\tfrac{\pi}{6} + OC \cdot \sin\tfrac{\pi}{6} \Longleftrightarrow OC = 2R - 3\sqrt{3}.$$

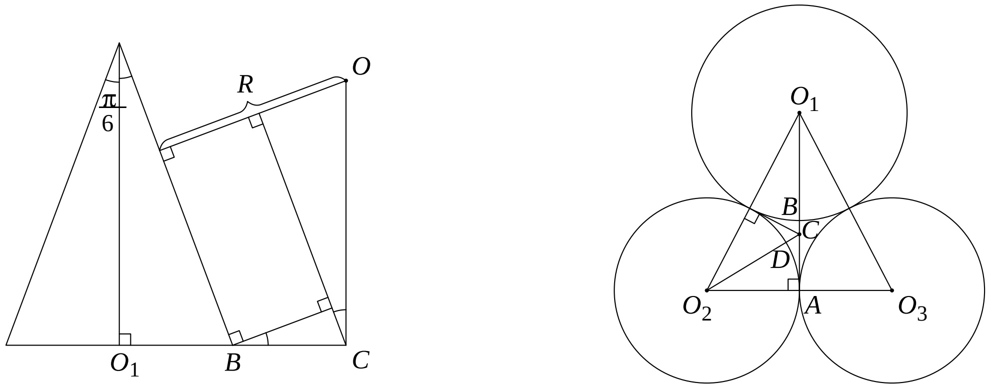
Применяя эти рассуждения к другому конусу, мы получим

$$R = CD \cdot \cos\tfrac{\pi}{3} + OC \cdot \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{7}{2} + R\sqrt{3} - \tfrac{9}{2} = R\sqrt{3} - 1 \Longleftrightarrow R = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 1\right).$$

Необходимо также проверить, что шар касается образующих конусов, а не их продолжений за вершину. Это равносильно условиям

$$R\cos\tfrac{\pi}{6} \leqslant CO_1 = 75 \quad \text{и} \quad R\cos\tfrac{\pi}{3} \leqslant CO_2 = 35,$$

которые, очевидно, выполняются. $\square$



Вариант 5

1. *Ожерелье состоит из 50 синих и некоторого количества красных бусинок. Известно, что на любом отрезке ожерелья, содержащем 8 синих бусинок, есть не менее 4 красных. Какое наименьшее количество красных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)*

Ответ: 29.

Решение. Заметим, что любой отрезок ожерелья из 11 бусинок содержит не более 7 синих и не менее 4 красных бусинок (в противном случае он содержал бы 8 синих бусинок и не более 3 красных). Зафиксируем в ожерелье красную бусинку. Примыкающие к ней 7 последовательных отрезков из 11 бусинок не покрывают всего ожерелья, поскольку в эти отрезки входит не более 49 синих бусинок из 50. Таким образом, общее число красных бусинок не меньше, чем $7 \cdot 4 + 1 = 29$.

Приведем пример ожерелья, содержащего ровно 29 красных бусинок. Рассмотрим блок

$$\text{Б} = \text{КС КС КС КС; ССС},$$

состоящий из 4 красных и 7 синих бусинок. Тогда искомое ожерелье имеет вид

$$\text{Б}, \text{Б}, \ldots, \text{Б} \ (7 \text{ раз}); \ \text{КС}. \quad \square$$

2. *У 100-значного натурального числа стерли одну из цифр (не старшую). В результате число уменьшилось в 13 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.*

Ответ: $1625 \cdot 10^{96}$, $195 \cdot 10^{97}$, $2925 \cdot 10^{96}$ и $13b \cdot 10^{98}$ при $b = 1, 2, 3$.

Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+1} n$, где k, m, n — неотрицательные целые числа, a — десятичная цифра. Стерев цифру a, мы получим число $m + 10^k n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} n = 13 \left(m + 10^k n\right) \Longleftrightarrow 12m = 10^k (a - 3n).$$

Цифра a должна делиться на 3, откуда $a = 3b$ при $b \in \{1, 2, 3\}$. Тогда $4m = 10^k (b - n)$. Цифра a не является старшей в исходном числе, поэтому $n > 0$. Заметим также, что $n \leqslant 3$, иначе $m < 0$. Значит, n будет старшей цифрой исходного числа, откуда $k = 98$. Рассмотрим три случая.

1) $b = n$. Тогда $m = 0$, а исходное число равно $13b \cdot 10^{98}$.

2) $b = n + 1$. Тогда $m = 25 \cdot 10^{96}$, пара (b, n) равна $(2, 1)$ или $(3, 2)$, а исходное число соответственно равно $1625 \cdot 10^{96}$ или $2925 \cdot 10^{96}$.

2) $b = n + 2$. Тогда $m = 5 \cdot 10^{97}$, $(b, n) = (3, 1)$, а исходное число равно $195 \cdot 10^{97}$. $\square$

3. *Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \big(2(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n) + \cos x_1 + \ldots + \cos x_n\big) \cdot \big(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n - 2(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n)\big).$$

Ответ: $-\frac{5n^2}{2}$.

Решение. Для $k = 1, \ldots, n$ положим $t_k = 3 \sin x_k - \cos x_k$, $s_k = \sin x_k + 3 \cos x_k$. Тогда

$$\begin{aligned} 4A &= \left(\sum_{k=1}^{n} (4 \sin x_k + 2 \cos x_k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (2 \sin x_k - 4 \cos x_k)\right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} (3 \sin x_k - \cos x_k) + \sum_{k=1}^{n} (\sin x_k + 3 \cos x_k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (3 \sin x_k - \cos x_k) - \sum_{k=1}^{n} (\sin x_k + 3 \cos x_k)\right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2. \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши

$$\left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n} s_k^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n}\left(s_k^2+t_k^2\right) = n\sum_{k=1}^{n} 10\left(\sin^2 x_k+\cos^2 x_k\right) = 10n^2,$$

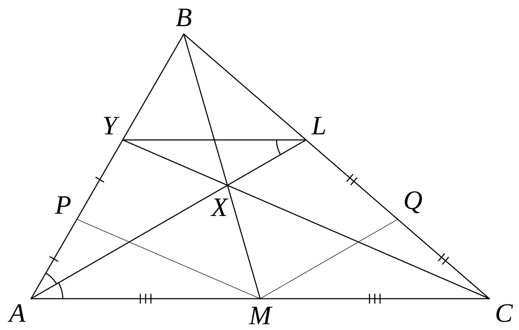
откуда

$$A \geqslant -\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2 \geqslant -\frac{5n^2}{2}.$$

Равенство реализуется, когда $\sin x_1 = \ldots = \sin x_n = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\cos x_1 = \ldots = \cos x_n = \frac{3}{\sqrt{10}}$. $\square$

4. *Биссектриса AL и медиана BM треугольника ABC пересекаются в точке X. Прямая CX пересекает сторону AB в точке Y. Найдите площадь треугольника CYL, если известно, что $\angle BAC = 60^\circ$ и $AL = x$.*

   Ответ: $\frac{x^2}{4\sqrt{3}}$.



Решение. Пусть P и Q — середины отрезков AY и CL. Тогда MP и MQ — средние линии треугольников ACY и ACL, откуда $MP \parallel CY$ и $MQ \parallel AL$. Поэтому

$$\frac{AY}{YB} = 2\cdot\frac{PY}{YB} = 2\cdot\frac{MX}{XB} = 2\cdot\frac{LQ}{LB} = \frac{CL}{LB}.$$

Отсюда вытекает, что треугольники YBL и ABC подобны. Поэтому $AC \parallel YL$ и

$$\angle ALY = \angle LAC = \tfrac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ.$$

Значит, AYL — равнобедренный треугольник с основанием x и углом при основании 30°. Мы получаем

$$S_{CYL} = S_{AYL} = \left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x^2}{4\sqrt{3}}. \quad \square$$

5. *Каждая из клеток доски $m\times n$ покрашена в черный или белый цвет. Известно, что для любой клетки доски количество клеток, имеющих с ней одинаковый цвет и хотя бы одну общую вершину, нечетно. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых это возможно.*

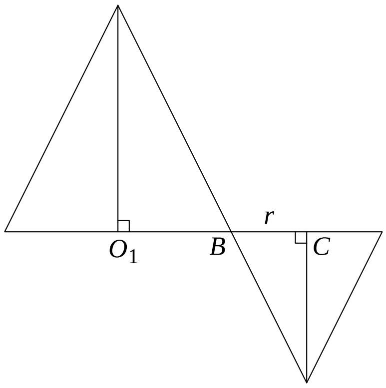
   Ответ: n или m четно.

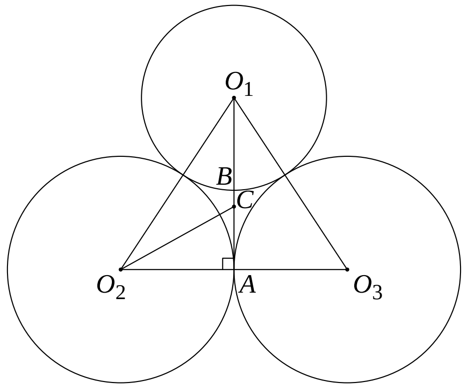
Решение. Назовем *соседними* клетки, имеющие общую вершину. Приведем пример раскраски, удовлетворяющей условию, если m или n четно. Пусть для определенности четно число строк. Покрасим первую и вторую строки в черный цвет, третью и четвертую — в белый, пятую и шестую — в черный, и так далее. Рассмотрим одноцветную «полоску» $2\times n$. Ее угловые клетки имеют по три соседние клетки того же цвета, а остальные — по пять. Поэтому такая раскраска удовлетворяет условию задачи.

Покажем, что для нечетных m и n требуемой раскраски не существует. В этом случае на доске нечетное число клеток и, значит, количество клеток одного из цветов тоже нечетно. Пусть для определенности нечетно число черных клеток. Рассмотрим множество $\mathcal{B}$ упорядоченных пар соседних черных клеток. Любая пара соседних черных клеток x и y учтена в множестве $\mathcal{B}$ два раза (как (x, y) и как (y, x)), поэтому количество элементов в множестве $\mathcal{B}$ четно. С другой стороны, у каждой черной клетки x существует нечетное число соседних черных клеток, поэтому для x имеется нечетное количество пар вида (x, y). Но выбрать x можно также нечетным числом способов. Значит, в $\mathcal{B}$ нечетное число элементов, что невозможно. □

6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны* 6, 24 *и* 24. *На стол поставили меньшим основанием вниз усеченный конус, который имеет с каждым из остальных конусов общую образующую. Найдите радиус меньшего основания усеченного конуса.*

   Ответ: 2.





Решение. Пусть C — центр меньшего основания усеченного конуса, r — радиус этого основания, O_1, O_2, O_3 — центры оснований других конусов. Обозначим через $\mathcal{K}_0$ конус, дополняющий усеченный конус до обычного, а через $\mathcal{K}_1$ — конус с центром основания O_1. На левом рисунке показано сечение $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ плоскостью Π, проходящей через точки O_1 и C перпендикулярно столу. По условию $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ имеют общую образующую, которая лежит в Π, поскольку проходит через вершины конусов. Пусть B — точка пересечения этой образующей со столом. Тогда B лежит на границе оснований $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$, а также на отрезке CO_1, соединяющем центры оснований. Отсюда вытекает, что основания $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ касаются друг друга в точке B, то есть $BC = r$. Аналогично проверяется, что расстояние от C до оснований двух других конусов равно r. Таким образом, справедливы равенства

$$r = CO_1 - 6 = CO_2 - 24 = CO_3 - 24.$$

Тогда $CO_2 = CO_3$, то есть точка C лежит на общей касательной AO_1 к основаниям бо́льших конусов (см. правый рисунок). Заметим, что

$$AO_1 = \sqrt{O_1O_2^2 - AO_2^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18.$$

Поэтому

$$(24 + r)^2 = CO_2^2 = 24^2 + AC^2 = 24^2 + (AO_1 - r - 6)^2 = 24^2 + (12 - r)^2, \quad \text{откуда } r = 2. \quad \square$$

Вариант 6

1. *Ожерелье состоит из 100 красных и некоторого количества синих бусинок. Известно, что на любом отрезке ожерелья, содержащем 10 красных бусинок, есть не менее 7 синих. Какое наименьшее количество синих бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)*

Ответ: 78.

Решение. Заметим, что любой отрезок ожерелья из 16 бусинок содержит не более 9 красных и не менее 7 синих бусинок (в противном случае он содержал бы 10 красных бусинок и не более 6 синих). Зафиксируем в ожерелье синюю бусинку. Примыкающие к ней 11 последовательных отрезков из 16 бусинок не покрывают всего ожерелья, поскольку в эти отрезки входит не более 99 красных бусинок из 100. Таким образом, общее число синих бусинок не меньше, чем $11 \cdot 7 + 1 = 78$.

Приведем пример ожерелья, содержащего ровно 78 синих бусинок. Рассмотрим блок

$$\text{Б} = \text{СК СК СК СК СК СК СК; КК},$$

состоящий из 7 синих и 9 красных бусинок. Тогда искомое ожерелье имеет вид

$$\text{Б}, \text{Б}, \ldots, \text{Б} \ (11 \text{ раз}); \ \text{СК}. \quad \square$$

2. *У 100-значного натурального числа одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 13 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.*

Ответ: $325b \cdot 10^{97}$ при $b = 1, 2, 3$.

Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+1} n$, где a — десятичная цифра, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m < 10^k$. Заменив цифру a нулем, мы получим число $m + 10^{k+1} n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} n = 13 \left(m + 10^{k+1} n\right) \Longleftrightarrow 12m = 10^k \left(a - 120n\right).$$

Заметим, что $n = 0$, иначе $m < 0$. Поэтому a будет старшей цифрой исходного числа, откуда $k = 99$. Число a должно делиться на 3, то есть $a = 3b$ при $b \in \{1, 2, 3\}$. Тогда равенство примет вид $4m = 10^{99} b$. Значит, $m = 25b \cdot 10^{97}$, и исходное число равно $325b \cdot 10^{97}$. Так как $m < 10^{99}$, число b может принимать значения 1, 2, 3. $\square$

3. *Найдите минимальное значение выражения*

$$A = \big(5(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n) + \sin x_1 + \ldots + \sin x_n\big) \cdot \big(\cos x_1 + \ldots + \cos x_n - 5(\sin x_1 + \ldots + \sin x_n)\big).$$

Ответ: $-13n^2$.

Решение. Для $k = 1, \ldots, n$ положим $t_k = 3\cos x_k - 2\sin x_k$, $s_k = 2\cos x_k + 3\sin x_k$. Тогда

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n} (5\cos x_k + \sin x_k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (\cos x_k - 5\sin x_k)\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} (3\cos x_k - 2\sin x_k) + \sum_{k=1}^{n} (2\cos x_k + 3\sin x_k)\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (3\cos x_k - 2\sin x_k) - \sum_{k=1}^{n} (2\cos x_k + 3\sin x_k)\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2.$$

В силу неравенства Коши

$$\left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} s_k^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} \big(s_k^2 + t_k^2\big) = n \sum_{k=1}^{n} 13\big(\cos^2 x_k + \sin^2 x_k\big) = 13n^2,$$

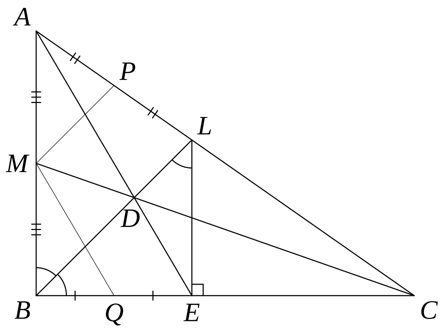
откуда

$$A \geqslant -\left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)^2 \geqslant -13n^2.$$

Равенство реализуется, когда $\sin x_1 = \ldots = \sin x_n = \frac{3}{\sqrt{13}}$ и $\cos x_1 = \ldots = \cos x_n = \frac{2}{\sqrt{13}}$. $\square$

4. *В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B проведены биссектриса BL и медиана CM, они пересекаются в точке D. Прямая AD пересекает сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника AEL, если известно, что $EL = x$.*

   Ответ: $\frac{x^2}{2}$.



Решение. Пусть P и Q — середины отрезков AL и BE. Тогда MP и MQ — средние линии треугольников ABL и ABE, откуда $MP \parallel BL$ и $MQ \parallel AE$. Поэтому

$$\frac{AL}{LC} = 2 \cdot \frac{PL}{LC} = 2 \cdot \frac{MD}{DC} = 2 \cdot \frac{QE}{EC} = \frac{BE}{EC}.$$

Тогда треугольники LCE и ACB подобны и, значит, угол LEC прямой. Кроме того, $\angle LBE = 45°$. Поэтому BEL — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом x. Мы получаем

$$S_{AEL} = S_{BEL} = \frac{x^2}{2}. \quad \square$$

5. *Каждая из клеток доски $m \times n$ покрашена в черный или белый цвет. Известно, что для любой клетки доски количество клеток, имеющих с ней общую сторону и одинаковый цвет, нечетно. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых это возможно.*

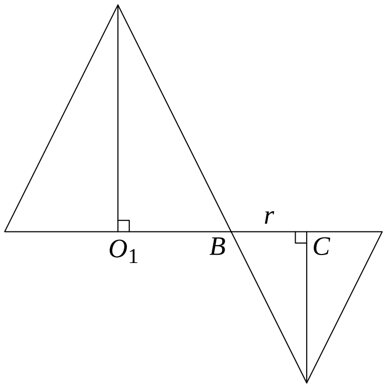
   Ответ: n или m четно.

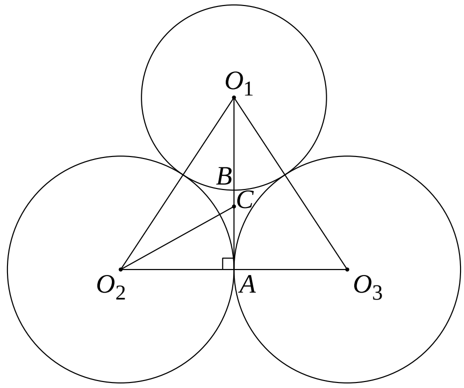
Решение. Назовем *соседними* клетки, имеющие общую сторону. Приведем пример раскраски, удовлетворяющей условию, если m или n четно. Пусть для определенности четно число строк. Покрасим нечетные столбцы доски следующим способом: две верхние клетки в черный цвет, затем две в белый, затем снова две в черный, и так далее. Четные столбцы раскрасим противоположным образом: две верхние клетки в белый цвет, затем две в черный, затем снова две в белый, и так далее. Тогда каждая клетка имеет ровно одну соседнюю клетку того же цвета. Поэтому такая раскраска удовлетворяет условию задачи.

Покажем, что для нечетных m и n требуемой раскраски не существует. В этом случае на доске нечетное число клеток и, значит, количество клеток одного из цветов тоже нечетно. Пусть для определенности нечетно число черных клеток. Рассмотрим множество $\mathcal{B}$ упорядоченных пар соседних черных клеток. Любая пара соседних черных клеток x и y учтена в множестве $\mathcal{B}$ два раза (как (x, y) и как (y, x)), поэтому количество элементов в множестве $\mathcal{B}$ четно. С другой стороны, у каждой черной клетки x существует нечетное число соседних черных клеток, поэтому для x имеется нечетное количество пар вида (x, y). Но выбрать x можно также нечетным числом способов. Значит, в $\mathcal{B}$ нечетное число элементов, что невозможно. $\square$

6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны* 10, 15 *и* 15. *На стол поставили меньшим основанием вниз усеченный конус, который имеет с каждым из остальных конусов общую образующую. Найдите площадь меньшего основания усеченного конуса.*

Ответ: 4π.





Решение. Пусть C — центр меньшего основания усеченного конуса, r — радиус этого основания, O_1, O_2, O_3 — центры оснований других конусов. Обозначим через $\mathcal{K}_0$ конус, дополняющий усеченный конус до обычного, а через $\mathcal{K}_1$ — конус с центром основания O_1. На левом рисунке показано сечение $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ плоскостью Π, проходящей через точки O_1 и C перпендикулярно столу. По условию $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ имеют общую образующую, которая лежит в Π, поскольку проходит через вершины конусов. Пусть B — точка пересечения этой образующей со столом. Тогда B лежит на границе оснований $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$, а также на отрезке CO_1, соединяющем центры оснований. Отсюда вытекает, что основания $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ касаются друг друга в точке B, то есть $BC = r$. Аналогично проверяется, что расстояние от C до оснований двух других конусов равно r. Таким образом, справедливы равенства

$$r = CO_1 - 10 = CO_2 - 15 = CO_3 - 15.$$

Тогда $CO_2 = CO_3$, то есть точка C лежит на общей касательной AO_1 к основаниям бóльших конусов (см. правый рисунок). Заметим, что

$$AO_1 = \sqrt{O_1O_2^2 - AO_2^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20.$$

Поэтому

$$(15 + r)^2 = CO_2^2 = 15^2 + AC^2 = 15^2 + (AO_1 - r - 10)^2 = 15^2 + (10 - r)^2,$$

откуда $r = 2$ и $\pi r^2 = 4\pi$. $\square$

Вариант 7

1. *Ожерелье состоит из 50 синих, 100 красных и 100 зеленых бусинок. Назовем четвёрку подряд идущих бусинок хорошей, если среди них ровно 2 синих и по одной красной и зелёной. Какое наибольшее количество хороших четвёрок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)*

   Ответ: 99.

   Решение. Синие бусинки составляют пятую часть от общего количества. Поэтому найдутся две последовательные синие бусинки (назовем их a и b), разделенные не менее чем тремя бусинками. Заметим, что a и b входят не более чем в три хорошие четверки, а остальные синие бусинки — не более чем в четыре. Если сложить эти неравенства, то в правой части получится $48 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 198$, а в левой — удвоенное количество хороших четверок, поскольку каждая будет учтена два раза. Значит, всего может быть не более 99 хороших четверок.

   Приведем пример ожерелья, дающего ровно 99 хороших четверок:

$$\text{КЗСС; КЗСС; }\ldots\text{; КЗСС (25 раз); КЗ }\ldots$$

(многоточие в конце означает произвольную комбинацию зеленых и красных бусинок). Хорошими будут четверки, начинающиеся с позиций $1, 2, \ldots, 99$, и только они. □

2. *У 200-значного натурального числа стерли одну цифру. В результате число уменьшилось в 5 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.*

   Ответ: $125a \cdot 10^{197}$ при $a = 1, 2, 3$.

   Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+1} n$, где a — десятичная цифра, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m < 10^k$. Стерев цифру a, мы получим число $m + 10^k n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} n = 5\left(m + 10^k n\right) \Longleftrightarrow 4m = 10^k\,(a + 5n).$$

Заметим, что $n = 0$, иначе $m > 10^k$. Поэтому a будет старшей цифрой исходного числа, откуда $k = 199$. Тогда

$$4m = 10^k a = 10^{199} a \Longleftrightarrow m = 25a \cdot 10^{197},$$

и исходное число равно $125a \cdot 10^{197}$. Так как $m < 10^{199}$, цифра a принимает значения 1, 2, 3. □

3. *Даны числа* $x_1, \ldots, x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. *Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sin x_1 + \ldots + \sin x_n}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x_1 + \ldots + \operatorname{tg}^2 x_n + n}}.$$

   Ответ: $\frac{\sqrt{n}}{2}$.

   Решение. Заметим, что при любых $a_1, \ldots, a_n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Отсюда в силу неравенства для среднего гармонического и среднего арифметического

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x_1 + \ldots + \operatorname{tg}^2 x_n + n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x_1} + \ldots + \frac{1}{\cos^2 x_n}}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{\cos x_1} + \ldots + \frac{1}{\cos x_n}} \leqslant \frac{\cos x_1 + \ldots + \cos x_n}{n\sqrt{n}}.$$

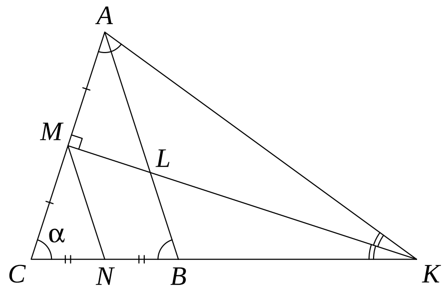
Тогда по неравенству Коши

$$A \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \cos x_k\right)}{n\sqrt{n}} \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \cos x_k\right)^2}{2n\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2 x_k + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos^2 x_k}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{\pi}{4}$. $\square$

4. *К боковой стороне AC равнобедренного треугольника ABC проведен серединный перпендикуляр. Он пересекает боковую сторону AB в точке L, а продолжение основания — в точке K. Оказалось, что площади треугольников ALC и KBL равны. Найдите углы треугольника.*

Ответ: $36°, 72°, 72°$.



Решение 1. Пусть M и N — середины отрезков AC и BC соответственно, $\alpha = \angle ABC$. Тогда MN — средняя линия треугольника ABC и, значит, $MN \parallel AB$. Поскольку точка K лежит на серединном перпендикуляре к AC, отрезки KA и KC равны, откуда $\angle KAC = \angle KCA = \alpha$. В силу условия

$$2 = \frac{S_{KBL}}{S_{AML}} = \frac{KL \cdot LB}{LM \cdot AL} \Longleftrightarrow \frac{LB}{AL} = 2 \cdot \frac{LM}{KL}.$$

Так как KL — биссектриса треугольника AKB, мы получим $\frac{LB}{AL} = \frac{KB}{AK}$. Кроме того,

$$2 \cdot \frac{LM}{KL} = 2 \cdot \frac{BN}{KB} = \frac{BC}{KB}.$$

Тогда из этих двух соотношений

$$\frac{KB}{CK} = \frac{KB}{AK} = \frac{LB}{AL} = 2 \cdot \frac{LM}{KL} = \frac{BC}{KB} \Longrightarrow KB^2 = BC \cdot CK.$$

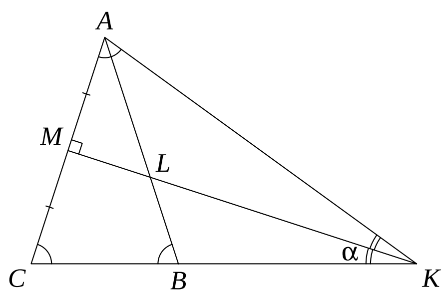
Треугольники ABC и KAC подобны по двум углам, откуда

$$\frac{CK}{AB} = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow AB^2 = BC \cdot CK.$$

Поэтому $KB = AB$, то есть треугольник ABK равнобедренный. Заметим, что

$$\angle BAK = \angle CAK - \angle CAB = \alpha - (180° - 2\alpha) = 3\alpha - 180°, \quad \angle AKB = 180° - 2\alpha.$$

Мы получаем $3\alpha - 180° = 180° - 2\alpha$, откуда $\alpha = 72°$. Таким образом, углы ABC и ACB равны $72°$, а угол BAC равен $36°$. $\square$



Решение 2. Пусть M — середина AC. Заметим, что по двум катетам равны прямоугольные треугольники AML и CML, а также AMK и CMK. Тогда $\angle AKM = \angle CKM$; обозначим общее значение этих углов через α. Треугольники BAC и AKC — равнобедренные, поэтому

$$\angle ABC = \angle ACK = \angle KAC = 90^\circ - \alpha \quad \text{и} \quad \angle ABK = 90^\circ + \alpha.$$

Треугольники ALK и CLK равны по двум сторонам и углу, откуда

$$\angle LCB = \angle LAK = 180^\circ - \angle ABK - \angle AKB = 90^\circ - 3\alpha \quad \text{и} \quad \angle LCM = \angle LAM = \angle KAC - \angle LAK = 2\alpha.$$

По формуле для площади треугольника

$$\tfrac{1}{2} \cdot LK \cdot LB \cdot \sin\angle KLB = S_{KBL} = S_{ALC} = 2S_{ALM} = AL \cdot ML \cdot \sin\angle ALM = AL \cdot ML \cdot \sin\angle KLB.$$

Таким образом,

$$2 \cdot \frac{AL}{LK} = \frac{LB}{ML} = \frac{LB}{LC\sin\angle LCM} = \frac{LB}{LC\sin 2\alpha}\,.$$

По теореме синусов для треугольников ALK и BCL

$$\frac{AL}{LK} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - 3\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{LB}{LC} = \frac{\sin(90^\circ - 3\alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Подставляя эти соотношения в предыдущее равенство, мы получим

$$2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha} = 2 \cdot \frac{AL}{LK} = \frac{LB}{LC\sin 2\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha}\,.$$

Следовательно,

$$\cos^2 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\sin 2\alpha = \sin^2 2\alpha,$$

откуда

$$\cos 3\alpha = \sin 2\alpha \Longleftrightarrow 3\alpha = 90^\circ - 2\alpha \Longleftrightarrow \alpha = 18^\circ. \quad \square$$

5. *Из n^2 лампочек собрали табло $n \times n$. Каждая лампочка имеет два состояния — включенное и выключенное. При нажатии на произвольную лампочку ее состояние сохраняется, а все лампочки, находящиеся с ней в одной строке или в одном столбце, меняют свое состояние на противоположное. Изначально все лампочки на табло выключены. Петя последовательно нажал на несколько лампочек, в результате чего табло не погасло полностью. Какое наименьшее количество лампочек может гореть на табло?*

Ответ: $2n - 2$.

Решение. Назовем *реверсированием* набора лампочек смену состояния всех лампочек этого набора на противоположное. Отметим два простых факта.

1) *Нажатие на лампочку эквивалентно реверсированию строки и столбца, в которых эта лампочка стоит.* Действительно, при таких реверсированиях нажимаемая лампочка меняет свое состояние дважды, то есть не меняет его, а остальные лампочки в той же строке или том же столбце меняют свое состояние один раз.

2) *При последовательном нажатии нескольких лампочек соответствующие им реверсирования можно производить в любом порядке.* Действительно, для любой лампочки число смен ее состояний равно суммарному количеству реверсирований строк и столбцов, которым она принадлежит.

Пусть было сделано k нажатий на лампочки. Припишем i-й строке и i-му столбцу соответственно числа p_i и q_i, обозначающие количество их реверсирований. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=1}^{n} q_j = 2k.$$

Мы можем исключить в левой части четные p_i и q_j, поскольку четное число реверсирований строк или столбцов не меняет их состояния. После этого левая часть останется четной. С другой стороны, суммы в левой части будут тогда содержать только нечетные слагаемые. Поэтому число слагаемых в первой сумме (обозначим его через a) имеет ту же четность, что число слагаемых во второй сумме (обозначим его через b). Таким образом, мы реверсировали a различных строк и b различных столбцов, причем a и b имеют одинаковую четность. При этом изменят свое состояние по сравнению с исходным (то есть включатся) в точности те лампочки, которые стоят в реверсированной строке и нереверсированном столбце или наоборот. Первых лампочек имеется $a(n-b)$, а вторых $b(n-a)$. Поэтому в результате будет гореть $a(n-b)+b(n-a)$ лампочек. Покажем, что $a(n-b)+b(n-a) \geqslant 2n-2$. Если $b=0$, то a четно и не равно нулю (в противном случае все лампочки будут выключены). Тогда

$$a(n-b)+b(n-a) = an \geqslant 2n.$$

Если $b=n$, то $n-a$ четно и не равно нулю (в противном случае все лампочки будут выключены), откуда

$$a(n-b)+b(n-a) = n(n-a) \geqslant 2n.$$

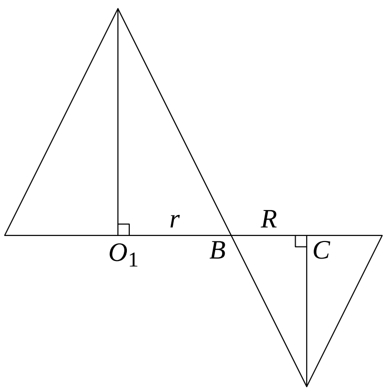
Аналогичным образом рассматриваются случаи $a=0$ и $a=n$. Для дальнейшего заметим, что $xy \geqslant x+y-1$ для $x, y \geqslant 1$. Поэтому при $1 \leqslant a, b \leqslant n-1$

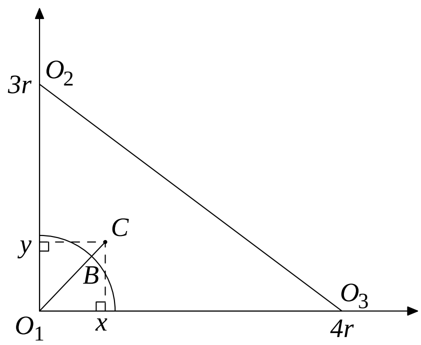
$$a(n-b)+b(n-a) \geqslant \big(a+(n-b)-1\big)+\big(b+(n-a)-1\big) = 2n-2.$$

Осталось показать, что можно зажечь ровно $2n-2$ лампочки. Для этого достаточно на погашенном табло нажать один раз на произвольную лампочку. □

6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны* 23, 46 *и* 69. *На стол поставили меньшим основанием вниз усеченный конус, который имеет с каждым из остальных конусов общую образующую. Найдите радиус меньшего основания усеченного конуса.*

Ответ: 6.





Решение. Пусть C — центр меньшего основания усеченного конуса, R — радиус этого основания, O_1, O_2, O_3 — центры оснований других конусов. Обозначим через $\mathcal{K}_0$ конус, дополняющий усеченный конус до обычного, а через $\mathcal{K}_1$ — конус с центром основания O_1. На левом рисунке показано сечение $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ плоскостью Π, проходящей через точки O_1 и C перпендикулярно столу. По условию $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ имеют общую образующую, которая лежит в Π, поскольку проходит через вершины конусов. Пусть B — точка пересечения этой образующей со столом. Тогда B лежит на границе оснований $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$, а также на отрезке CO_1, соединяющем центры оснований. Отсюда вытекает, что основания $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ касаются друг друга в точке B, то есть $BC = R$. Аналогично проверяется, что расстояние от C до оснований двух других конусов равно R. Положим $r = 23$ и заметим, что

$$O_1O_2 = 3r, \quad O_1O_3 = 4r, \quad O_2O_3 = 5r,$$

то есть треугольник $O_1O_2O_3$ — прямоугольный. Направим координатные оси вдоль лучей O_1O_3 и O_1O_2 (см. правый рисунок). Пусть точка C имеет координаты (x, y). Так как

$$CO_1 = BO_1 + BC = r + R, \quad CO_2 = 2r + R, \quad CO_3 = 3r + R,$$

справедливы равенства

$$(r + R)^2 - x^2 = y^2 = (3r + R)^2 - (4r - x)^2 \iff r^2 + 2rR = 6rR + 8rx - 7r^2 \iff 2x = 2r - R,$$

а также

$$(r + R)^2 - y^2 = x^2 = (2r + R)^2 - (3r - y)^2 \iff r^2 + 2rR = 4rR + 6ry - 5r^2 \iff 3y = 3r - R.$$

Поскольку $x^2 + y^2 = CO_1^2 = (r + R)^2$, мы получим

$$36\,(r + R)^2 = (6r - 3R)^2 + (6r - 2R)^2 \iff 23R^2 + 132rR - 36r^2 = 0.$$

Это уравнение относительно R имеет единственное положительное решение $R = \frac{6}{23}\,r = 6$. $\square$

Вариант 8

1. *На нитке надеты 75 синих, 75 красных и 75 зеленых бусинок. Назовем пятерку подряд идущих бусинок хорошей, если среди них ровно 3 зеленых бусинки и по одной красной и синей. Какое наибольшее количество хороших пятерок может быть на этой нитке?*

Ответ: 123.

Решение. Заметим, что первая и последняя зеленые бусинки входят не более чем в три хорошие пятерки, вторая и предпоследняя — не более чем в четыре пятерки, а остальные — не более чем в пять пятерок. Если сложить эти неравенства, то в правой части получится $2\cdot 3+2\cdot 4+71\cdot 5=369$, а в левой — утроенное количество хороших пятерок, поскольку каждая будет учтена трижды. Значит, всего может быть не более 123 хороших пятерок.

Приведем пример расположения бусинок, дающего ровно 123 хороших пятерки:

$$\text{КСЗЗЗ; КСЗЗЗ; } \ldots \text{; КСЗЗЗ (25 раз); КС } \ldots$$

(многоточие в конце означает произвольную комбинацию синих и красных бусинок). Хорошими будут пятерки, начинающиеся с позиций $1, 2, \ldots, 123$, и только они. □

2. *У 200-значного натурального числа одну из цифр заменили нулем (если она старшая — просто стерли). В результате число уменьшилось в 5 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.*

Ответ: $125a\cdot 10^{97}$ при $a=1,2,3$.

Решение. Представим исходное число в виде $m+10^k a+10^{k+1}n$, где a — десятичная цифра, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m<10^k$. Заменив цифру a нулем, мы получим число $m+10^{k+1}n$. По условию

$$m+10^k a+10^{k+1}n=5\left(m+10^{k+1}n\right) \Longleftrightarrow 4m=10^k\left(a-40n\right).$$

Заметим, что $n=0$, иначе $m<0$. Поэтому a будет старшей цифрой исходного числа, откуда $k=199$. Тогда

$$4m=10^k a=10^{199}a \Longleftrightarrow m=25a\cdot 10^{197},$$

и исходное число равно $125a\cdot 10^{197}$. Так как $m<10^{199}$, цифра a принимает значения 1, 2, 3. □

3. *Даны числа $x_1,\ldots,x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A=\frac{\cos^2 x_1+\ldots+\cos^2 x_n}{\sqrt{n}+\sqrt{\operatorname{ctg}^4 x_1+\ldots+\operatorname{ctg}^4 x_n}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{n}}{4}$.

Решение. Заметим, что при любых $a_1,\ldots,a_n$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2\leqslant n\sum_{k=1}^n a_k^2.$$

Отсюда в силу неравенства для среднего гармонического и среднего арифметического

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{\operatorname{ctg}^4 x_1+\ldots+\operatorname{ctg}^4 x_n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^n\operatorname{ctg}^2 x_k}=\frac{\sqrt{n}}{\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{\sin^2 x_k}}\leqslant\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\sin^2 x_k.$$

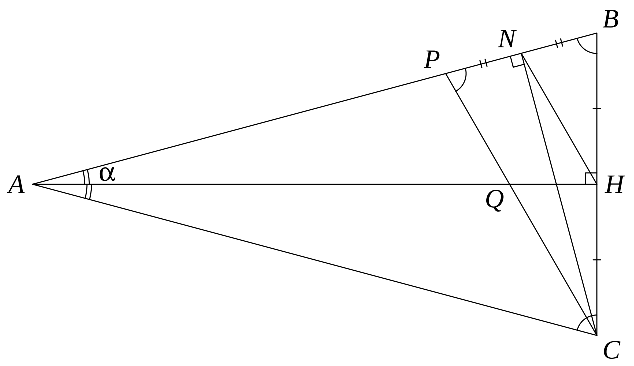
Тогда по неравенству Коши

$$A\leqslant\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^n\sin^2 x_k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^n\cos^2 x_k\right)}{n\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{4n\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^n\sin^2 x_k+\sum_{k=1}^n\cos^2 x_k\right)^2=\frac{\sqrt{n}}{4}.$$

Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{\pi}{4}$. $\square$

4. *На основание BC равнобедренного треугольника ABC опущена высота AH. На стороне AB отмечена такая точка P, что $CP = BC$. Отрезок CP пересекает высоту AH в точке Q. Оказалось, что площадь треугольника BHQ в 4 раза меньше площади треугольника APQ. Найдите углы треугольника ABC.*

   Ответ: $30°, 75°, 75°$.



Решение 1. Поскольку треугольник ABC равнобедренный, его высота AH является также биссектрисой и медианой, откуда $BH = CH$ и $\angle CAH = \angle BAH$. Пусть N — середина отрезка BP. Тогда NH — средняя линия треугольника PBC и, значит, $NH \parallel PC$. Треугольник BCP равнобедренный, поэтому отрезок CN будет его высотой. В силу условия

$$4 = \frac{S_{APQ}}{S_{BHQ}} = \frac{S_{APQ}}{S_{CHQ}} = \frac{AQ \cdot PQ}{QH \cdot QC} \Longrightarrow \frac{PQ}{QC} = 4 \cdot \frac{QH}{AQ} = 4 \cdot \frac{PN}{AP}.$$

Так как AQ — биссектриса треугольника APC, мы получим

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{QC} = 4 \cdot \frac{PN}{AP}.$$

Положим $x = \frac{AN}{AB}$. Тогда

$$\frac{PN}{AB} = \frac{BN}{AB} = 1 - x, \quad \frac{AP}{AB} = 1 - 2 \cdot \frac{PN}{AB} = 2x - 1,$$

и из предыдущего равенства

$$(2x-1)^2 = \left(\frac{AP}{AB}\right)^2 = 4 \cdot \frac{PN}{AP} \cdot \frac{AP}{AB} = 4 \cdot \frac{PN}{AB} = 4 - 4x \Longleftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $x = \frac{AN}{AC} = \cos\angle BAC$, угол BAC равен $30°$, а углы ABC и ACB равны $75°$. $\square$

Решение 2. Заметим, что по двум катетам равны прямоугольные треугольники AHB и AHC, а также QHB и QHC. Тогда $\angle BAH = \angle CAH$; обозначим общее значение этих углов через α. Треугольники BCP и BAC — равнобедренные, поэтому

$$\angle CPB = \angle PBC = \angle ACB = 90° - \alpha \quad \text{и} \quad \angle APC = 90° + \alpha.$$

Треугольники AQB и AQC равны по двум сторонам и углу, откуда

$$\angle PBQ = \angle ACQ = 180° - \angle APC - \angle PAC = 90° - 3\alpha \quad \text{и} \quad \angle QBH = \angle QCH = \angle ACB - \angle ACQ = 2\alpha.$$

По формуле для площади треугольника

$$\tfrac{1}{2}AQ \cdot PQ \cdot \sin\angle AQP = S_{APQ} = 4S_{BHQ} = 4S_{CHQ} = 2CQ \cdot HQ \cdot \sin\angle CQH = 2CQ \cdot HQ \cdot \sin\angle AQP.$$

Таким образом,

$$4 \cdot \frac{CQ}{AQ} = \frac{PQ}{HQ} = \frac{PQ}{BQ\sin\angle QBH} = \frac{PQ}{BQ\sin 2\alpha}\,.$$

По теореме синусов для треугольников CQA и PBQ

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - 3\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{PQ}{BQ} = \frac{\sin(90^\circ - 3\alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Подставляя эти соотношения в предыдущее равенство, мы получим

$$4 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha} = 4 \cdot \frac{CQ}{AQ} = \frac{PQ}{BQ\sin 2\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha}\,.$$

Следовательно,

$$\cos^2 3\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha\sin 2\alpha = 2\sin^2 2\alpha,$$

откуда

$$\cos 3\alpha = \sqrt{2}\,\sin 2\alpha \Longleftrightarrow 1 - 4\sin^2\alpha = 2\sqrt{2}\,\sin\alpha \Longleftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \Longleftrightarrow \alpha = 15^\circ. \quad \square$$

5. *Из n^2 лампочек собрали табло $n \times n$. Каждая лампочка имеет два состояния — включенное и выключенное. При нажатии на произвольную лампочку ее состояние сохраняется, а все лампочки, находящиеся с ней в одной строке или в одном столбце, меняют свое состояние на противоположное. Изначально все лампочки на табло выключены. Вася последовательно нажал на несколько лампочек, из которых никакие две не лежат в одной строке или в одном столбце. Какое наибольшее количество лампочек мог зажечь Вася?*

Ответ: $\frac{n^2}{2}$ при четном n и $\frac{n^2-1}{2}$ при нечетном n.

Решение. Назовем *реверсированием* набора лампочек смену состояния всех лампочек этого набора на противоположное. Отметим два простых факта.

1) *Нажатие на лампочку эквивалентно реверсированию строки и столбца, в которых эта лампочка стоит.* Действительно, при таких реверсированиях нажимаемая лампочка меняет свое состояние дважды, то есть не меняет его, а остальные лампочки в той же строке или том же столбце меняют свое состояние один раз.

2) *При последовательном нажатии нескольких лампочек соответствующие им реверсирования можно производить в любом порядке.* Действительно, для любой лампочки число смен ее состояний равно суммарному количеству реверсирований строк и столбцов, которым она принадлежит.

Пусть было сделано k нажатий на лампочки. Тогда мы реверсировали k различных строк и k различных столбцов. При этом изменят свое состояние по сравнению с исходным (то есть включатся) в точности те лампочки, которые стоят в реверсированной строке и нереверсированном столбце или наоборот. Тех и других лампочек имеется $k(n-k)$, поэтому в результате будет гореть $2k(n-k)$ лампочек. Покажем, что

$$2k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{2} \text{ при четном } n \quad \text{и} \quad 2k(n-k) \leqslant \frac{n^2-1}{2} \text{ при нечетном } n. \qquad (*)$$

Рассмотрим выражение $2k(n-k)$ как квадратный трехчлен относительно k. Его график представляет собой параболу с вершиной $k = \frac{n}{2}$. Так как коэффициент при k^2 отрицателен, наибольшее значение трехчлена достигается в вершине и равно $\frac{n^2}{2}$. Тогда $2k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{2}$, и первое из неравенств $(*)$ доказано. Для обоснования второго нужно еще заметить, что число $2k(n-k)$ целое, поэтому

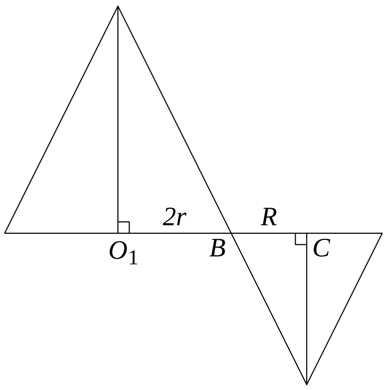
$$2k(n-k) \leqslant \left[\frac{n^2}{2}\right] = \frac{n^2-1}{2}.$$

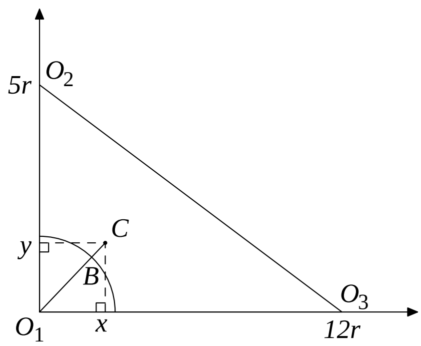
Осталось показать, что в неравенствах $(*)$ могут достигаться равенства. Нажмем в исходном состоянии $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ различных лампочек на главной диагонали табло. При четном n мы получим $\frac{n^2}{2}$ зажженных лампочек, а при нечетном n их число составит

$$2 \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \left(n - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2-1}{2}. \quad \square$$

6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Радиусы их оснований равны $2r$, $3r$ и $10r$. На стол поставили меньшим основанием вниз усеченный конус, который имеет с каждым из остальных конусов общую образующую. Найдите r, если радиус меньшего основания усеченного конуса равен 15.*

Ответ: 29.





Решение. Пусть C — центр меньшего основания усеченного конуса, O_1, O_2, O_3 — центры оснований других конусов, $R = 15$. Обозначим через $\mathcal{K}_0$ конус, дополняющий усеченный конус до обычного, а через $\mathcal{K}_1$ — конус с центром основания O_1. На левом рисунке показано сечение $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ плоскостью Π, проходящей через точки O_1 и C перпендикулярно столу. По условию $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ имеют общую образующую, которая лежит в Π, поскольку проходит через вершины конусов. Пусть B — точка пересечения этой образующей со столом. Тогда B лежит на границе оснований $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$, а также на отрезке CO_1, соединяющем центры оснований. Отсюда вытекает, что основания $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ касаются друг друга в точке B, то есть $BC = R$. Аналогично проверяется, что расстояние от C до оснований двух других конусов равно R. Заметим, что

$$O_1O_2 = 5r, \quad O_1O_3 = 12r, \quad O_2O_3 = 13r,$$

то есть треугольник $O_1O_2O_3$ — прямоугольный. Направим координатные оси вдоль лучей O_1O_3 и O_1O_2 (см. правый рисунок). Пусть точка C имеет координаты (x, y). Так как

$$CO_1 = BO_1 + BC = 2r + R, \quad CO_2 = 3r + R, \quad CO_3 = 10r + R,$$

справедливы равенства

$$(2r+R)^2 - x^2 = y^2 = (10r+R)^2 - (12r-x)^2 \iff 4r^2 + 4rR = 20rR + 24rx - 44r^2 \iff 3x = 6r - 2R,$$

а также

$$(2r+R)^2 - y^2 = x^2 = (3r+R)^2 - (5r-y)^2 \iff 4r^2 + 4rR = 6rR + 10ry - 16r^2 \iff 5y = 10r - R.$$

Поскольку $x^2 + y^2 = CO_1^2 = (2r+R)^2$, мы получим

$$225\,(2r+R)^2 = (30r-10R)^2 + (30r-3R)^2 \iff 225r^2 - 420Rr - 29R^2 = 0.$$

Это уравнение относительно r имеет единственное положительное решение $r = \frac{29}{15}\,R = 29. \quad \square$

Вариант 9

1. *Ожерелье состоит из 80 бусинок красного, синего и зеленого цвета. Известно, что на любом участке ожерелья между двумя синими бусинками есть хотя бы одна красная, а на любом участке ожерелья между двумя красными есть хотя бы одна зеленая. Какое наименьшее количество зелёных бусинок может быть в этом ожерелье? (Бусинки в ожерелье расположены циклически, то есть последняя соседствует с первой.)*

Ответ: 27.

Решение. Если синие бусинки расположены по кругу, то число пар соседних бусинок равно количеству бусинок. Так как между любыми двумя синими бусинками есть красная, красных бусинок в ожерелье не меньше, чем синих. Аналогичным образом доказывается, что зеленых бусинок в ожерелье не меньше, чем красных. Значит, зеленых бусинок не меньше, чем $\frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$, то есть их по крайней мере 27. Приведем пример ожерелья, содержащего ровно 27 зеленых бусинок:

$$\text{ЗКС; ЗКС; } \ldots \text{; ЗКС (26 раз); ЗК.} \quad \square$$

2. *У 100-значного натурального числа стерли две соседние цифры. В результате число уменьшилось в 87 раз. Найдите все числа, для которых это возможно.*

Ответ: $435 \cdot 10^{97}$, $1305 \cdot 10^{96}$, $2175 \cdot 10^{96}$, $3045 \cdot 10^{96}$.

Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k a + 10^{k+2} n$, где a, k, m, n — неотрицательные целые числа, причем $m < 10^k$ и $a < 100$. Стерев цифры в k-м и $(k+1)$-м разрядах, мы получим число $m + 10^k n$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+2} n = 87\left(m + 10^k n\right) \iff 86m = 10^k (a + 13n).$$

Число $a + 13n$ положительно и делится на 43. Кроме того, $a + 13n < 86$, иначе $m \geqslant 10^k$. Поэтому $a + 13n = 43$, и пара (n, a) принимает значения $(0, 43)$, $(1, 30)$, $(2, 17)$, $(3, 4)$. В первом случае число разрядов равно $(k+2)$, откуда $k = 98$. Тогда $m = 5 \cdot 10^{97}$, а исходное число равно

$$m + 10^k a = 5 \cdot 10^{97} + 43 \cdot 10^{98} = 435 \cdot 10^{97}.$$

В остальных случаях число разрядов равно $(k+3)$, откуда $k = 97$. Тогда $m = 5 \cdot 10^{96}$, а исходными числами будут

$$10^{99} + 30 \cdot 10^{97} + 5 \cdot 10^{96}, \qquad 2 \cdot 10^{99} + 17 \cdot 10^{97} + 5 \cdot 10^{96}, \qquad 3 \cdot 10^{99} + 4 \cdot 10^{97} + 5 \cdot 10^{96},$$

что и дает ответ. $\square$

3. *Даны числа $x_1, \ldots, x_n \in (0, 1)$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt{1 - x_1} + \ldots + \sqrt{1 - x_n}}{\sqrt{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{n}}{2}$.

Решение. Заметим, что при любых $a_1, \ldots, a_n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Отсюда в силу неравенства для среднего гармонического и среднего арифметического

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}} \leqslant \frac{\sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}}{n\sqrt{n}}.$$

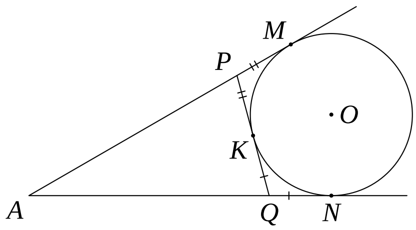
Тогда по неравенству Коши

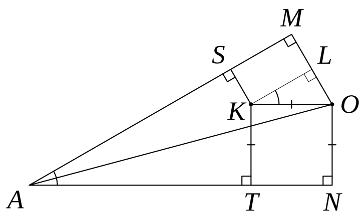
$$A \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-x_k}\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\right)}{n\sqrt{n}} \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-x_k}\right)^2+\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\right)^2}{2n\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(1-x_k)+\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{2}$. $\square$

4. *Внутри угла раствора 30° с вершиной A выбрана точка K, расстояния от которой до сторон угла равны 1 и 2. Через точку K проводятся всевозможные прямые, пересекающие стороны угла. Найдите минимальный периметр треугольника, отсекаемого прямой от угла.*

Ответ: $4\left(2+\sqrt{3}\right)$.





Решение. Проведем такую окружность ω, касающуюся сторон угла в точках M и N, что K лежит на малой дуге MN (см. левый рисунок). Обозначим через p периметр треугольника, отсекаемого от угла касательной к ω в точке K. Тогда

$$p = AP + PK + KQ + AQ = AP + PM + QN + AQ = AM + AN = 2 \cdot AN.$$

Заметим, что в этом рассуждении можно заменить K любой другой точкой, лежащей на малой дуге MN.

Покажем, что периметр p будет минимальным. Пусть ℓ — секущая к ω, проходящая через точку K. Проведем параллельно ей прямую ℓ_1, касающуюся малой дуги MN. Прямые ℓ и ℓ_1 отсекают от угла подобные треугольники. Прямая ℓ_1 дает меньший треугольник, периметр которого равен p. Значит, на ℓ минимум не реализуется.

Пусть T и S — проекции точки K на стороны угла, где $KT = 2$ и $KS = 1$. Построим окружность ω. Обозначим через O точку пересечения биссектрисы угла с прямой, проходящей через K параллельно AT (см. правый рисунок). Пусть M и N — проекции точки O на лучи AS и AT, L — проекция K на OM. Тогда

$$OM = ON = KT = 2, \quad LO = OM - LM = OM - KS = 1 \quad \text{и} \quad OK = 2,$$

поскольку $\angle LKO = \angle MAN = 30^\circ$. Значит, O — центр искомой окружности ω. По доказанному выше

$$p = 2 \cdot AN = 2 \cdot ON \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ = 4 \cdot \frac{1+\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 4\left(2+\sqrt{3}\right). \quad \square$$

5. *В клетках таблицы 80×80 расставлены попарно различные натуральные числа. Каждое из них либо простое, либо является произведением двух простых чисел (возможно, совпадающих). Известно, что для любого числа a из таблицы в одной строке или в одном столбце с ним найдется такое число b, что a и b не являются взаимно простыми. Какое наибольшее количество простых чисел может быть в таблице?*

Ответ: 4266.

Решение. Будем говорить, что составное число a *обслуживает* простое число p, если числа a и p не взаимно просты (то есть a делится на p). Для каждого простого числа в таблице есть обслуживающее его составное. Поскольку каждое составное число имеет не более двух различных простых делителей, оно обслуживает не более двух простых чисел. Таким образом, если таблица содержит n составных чисел, то простых — не более $2n$. Следовательно, общее количество чисел в таблице не превосходит $3n$. Тогда

$$3n \geqslant 80^2 \Longrightarrow n \geqslant \tfrac{80^2}{3} = 2133\tfrac{1}{3} \Longrightarrow n \geqslant 2134 \Longrightarrow 80^2 - n \leqslant 80^2 - 2134 = 4266.$$

Значит, количество простых чисел в таблице не превосходит 4266.

Покажем теперь, как можно разместить в таблице 4266 простых чисел. Воспользуемся следующим алгоритмом заполнения строк и столбцов.

1) Первые 52 позиции заполняем различными простыми числами $p_1, p_2, \ldots, p_{52}$. Эти числа должны быть новыми, то есть не использовавшимися ранее в таблице.

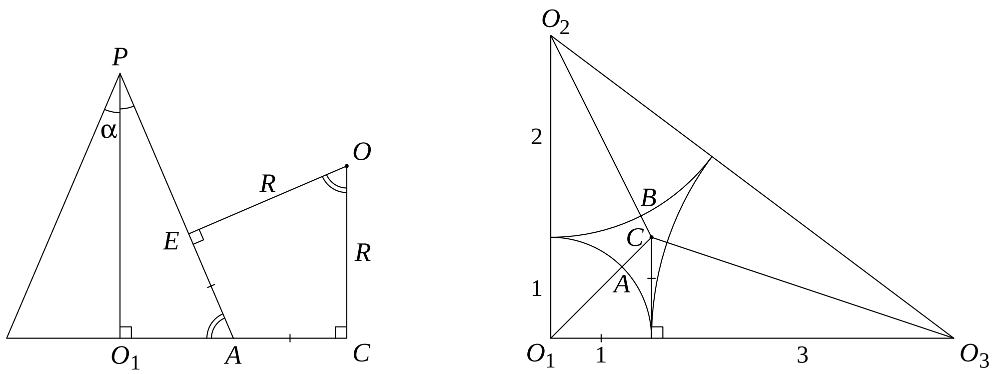
2) В следующих 26 клетках размещаем числа $p_1p_2, p_3p_4, \ldots, p_{51}p_{52}$.

3) Последние две позиции оставляем незаполненными.

Применим этот алгоритм последовательно сначала к строкам $1, 2, \ldots, 80$, а затем к двум последним столбцам. Тем самым мы расставим $80 \cdot 52 + 2 \cdot 52 = 4264$ простых числа. Осталось заполнить клетки квадрата 2×2 из правого нижнего угла. В нем на одной диагонали мы поставим пару новых простых чисел, а на другой — их квадраты. В итоге мы разместим 4266 различных простых чисел. $\square$

6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Высоты у конусов одинаковые, а радиусы их оснований равны 1, 2 и 3. На стол положили шар, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от всех точек касания конусов. Найдите радиус шара.*

Ответ: 1.



Решение: Пусть O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов, O — центр шара, R — радиус шара, C — точка касания шара со столом, 2α и 2β — углы при вершине первого и второго конусов, A и B — точки пересечения отрезков CO_1 и CO_2 с основаниями конусов. На левом рисунке показано сечение первого конуса плоскостью COO_1. Касание шара с первым конусом означает, что перпендикуляр OE, опущенный из точки O на образующую PA, равен R. Действительно, в этом случае шар и конус касаются плоскости, проходящей через образующую PA перпендикулярно сечению, и лежат по разные стороны от нее. Тогда шар касается прямых AC и AE в точках C и E, откуда

$$OC = OE = R, \quad AC = AE \quad \text{и} \quad \angle AOC = \tfrac{1}{2}\angle EOC = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}.$$

Поэтому $AC = R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ и, аналогично, $BC = R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$. Положим

$$\lambda = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}\right), \quad \mu = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\beta}{2}\right).$$

Так как $O_1O_2 = 3$, $O_1O_3 = 4$, $O_2O_3 = 5$, треугольник $O_1O_2O_3$ является прямоугольным. В силу условия точка C равноудалена от точек касания оснований конусов. Тогда C лежит на пересечении биссектрис треугольника $O_1O_2O_3$ и, значит, является центром его вписанной окружности, радиус которой равен 1. Вычисляя CO_1^2 и CO_2^2 двумя способами, мы получим

$$\begin{cases} (1+\lambda R)^2 = 2, \\ (2+\mu R)^2 = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda^2R^2 + 2\lambda R = 1, \\ \mu^2R^2 + 4\mu R = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda^2R^2 + 2\lambda R - 1 = 0, \\ \left(\lambda^2 - \mu^2\right)R^2 = 2R\,(2\mu - \lambda) \end{cases} \qquad (*)$$

(мы вычли второе уравнение из первого). Заметим, что

$$\frac{1}{\lambda}-\lambda=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}-\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=2\operatorname{tg}\alpha \quad \text{и, аналогично,} \quad \frac{1}{\mu}-\mu=2\operatorname{tg}\beta.$$

В силу равенства высот конусов справедливо соотношение $\operatorname{tg}\beta=2\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому

$$1-\mu^2=\frac{2\mu}{\lambda}\big(1-\lambda^2\big) \quad \text{и} \quad \lambda^2-\mu^2=\lambda^2-1+1-\mu^2=\frac{\big(1-\lambda^2\big)(2\mu-\lambda)}{\lambda}.$$

Второе из уравнений $(*)$ дает

$$R=\frac{2(2\mu-\lambda)}{\big(\lambda^2-\mu^2\big)}=\frac{2\lambda}{\big(1-\lambda^2\big)}\iff R-\lambda^2R=2\lambda.$$

Из первого уравнения системы $(*)$ вытекает, что $\lambda R=\sqrt{2}-1$. Исключая λ, мы получим

$$R-\frac{\big(\sqrt{2}-1\big)^2}{R}=\frac{2\big(\sqrt{2}-1\big)}{R}\iff R^2=\big(\sqrt{2}-1\big)\big(\sqrt{2}+1\big)=1\iff R=1. \quad \square$$

Вариант 10

1. *За круглым столом сидят 50 школьников: блондины, брюнеты и рыжие. Известно, что в любой группе сидящих подряд школьников между двумя блондинами есть хотя бы один брюнет, а в любой группе между двумя брюнетами — хотя бы один рыжий. Какое наименьшее количество рыжих может сидеть за этим столом?*

Ответ: 17.

Решение. Если бы за столом сидели одни блондины, то число пар соседей было бы равно количеству блондинов. Поскольку между любыми двумя блондинами есть брюнет, брюнетов за столом сидит не меньше, чем блондинов. Аналогичным образом доказывается, что рыжих за столом не меньше, чем брюнетов. Значит, за столом сидит не меньше $\frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ рыжих школьников, то есть их по крайней мере 17. Приведем пример рассадки, содержащей ровно 17 рыжих:

$$\text{РЧБ; РЧБ; }\ldots\text{; РЧБ; (16 раз); РЧ}$$

(буквы Р,Ч,Б обозначают соответственно рыжих, брюнетов и блондинов). $\square$

2. *У 200-значного натурального числа стерли старшую цифру и цифру, стоящую через одну от нее. В результате число уменьшилось в 44 раза. Найдите все числа, для которых это возможно.*

Ответ: $132c \cdot 10^{197}$ при $c = 1, 2, 3$.

Решение. Представим исходное число в виде $m + 10^k \cdot \overline{cba}$, где a, b, c — десятичные цифры, k, m — неотрицательные целые числа, причем $c > 0$ и $m < 10^k$. Стерев цифры a и c, мы получим число $m + 10^k b$. По условию

$$m + 10^k a + 10^{k+1} b + 10^{k+2} c = 44\left(m + 10^k b\right) \iff 43m = 10^k\,(a - 34b) + 10^{k+2} c.$$

Число m делится на 10^k и меньше, чем 10^k, поэтому оно равно нулю. Тогда после сокращения на 10^k уравнение примет вид $34b = a + 100c$. Поскольку $0 = (100c + a) \bmod 34 = (a - 2c) \bmod 34$, мы получаем $a = 2c$, откуда $b = 3c$. Так как $b < 10$, цифра c принимает значения 1, 2, 3. Осталось заметить, что исходное число $(k+3)$-значное, поэтому $k = 197$. $\square$

3. *Даны числа $x_1, \ldots, x_n \in (0,1)$. Найдите максимальное значение выражения*

$$A = \frac{\sqrt[4]{1-x_1} + \ldots + \sqrt[4]{1-x_n}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. В силу неравенства для среднего гармонического и среднего арифметического

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{x_n}}} \leqslant \frac{\sqrt[4]{x_1} + \ldots + \sqrt[4]{x_n}}{n^2}.$$

Заметим, что при любых $a_1, \ldots, a_n$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^4 \leqslant \left(n \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2 \leqslant n^3 \sum_{k=1}^{n} a_k^4.$$

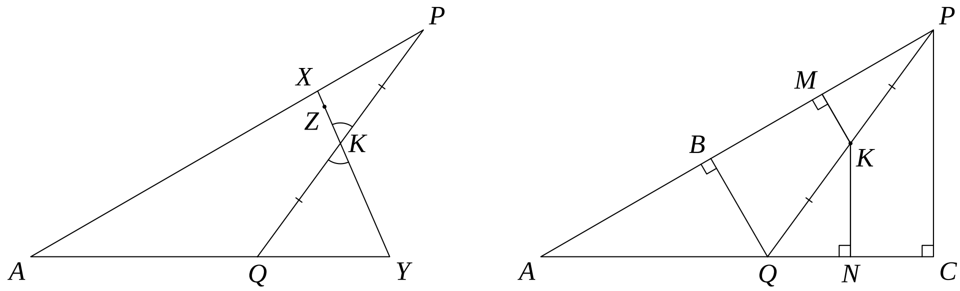
Отсюда в силу неравенства Коши

$$A^2 \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[4]{1-x_k}\right)^2 \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[4]{x_k}\right)^2}{n^4} \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[4]{1-x_k}\right)^4 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[4]{x_k}\right)^4}{2n^4} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(1-x_k) + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому $A \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. Равенство реализуется при $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{2}$. $\square$

4. *Внутри угла раствора* 30° *с вершиной* A *выбрана точка* K, *расстояния от которой до сторон угла равны 1 и 2. Через точку* K *проводятся всевозможные прямые, пересекающие стороны угла. Найдите минимальную площадь треугольника, отсекаемого прямой от угла.*

Ответ: 8.



Решение 1. Выберем на сторонах угла точки P и Q таким образом, чтобы точка K была серединой отрезка PQ. Покажем, что прямая PQ отсекает треугольник наименьшей площади. Возьмем другую прямую, проходящую через точку K. Пусть она пересекает стороны угла в точках X и Y. Переставляя при необходимости P с Q и X с Y, мы можем считать, что X лежит на отрезке AP. Нам достаточно доказать, что $KX < KY$. Действительно, в этом случае

$$S_{KXP} = \tfrac{1}{2} \cdot KX \cdot KP \cdot \sin\angle XKP = \tfrac{1}{2} \cdot KX \cdot KQ \cdot \sin\angle YKQ < \tfrac{1}{2} \cdot KY \cdot KQ \cdot \sin\angle YKQ = S_{KYQ},$$

откуда $S_{AXY} = S_{APQ} - S_{KXP} + S_{KYQ} > S_{APQ}$. Допустим, что $KX \geqslant KY$. Отметим на отрезке KX такую точку Z, что $KZ = KY$ (см. левый рисунок). Треугольники KQY и KPZ равны по двум сторонам и углу, откуда

$$\angle KQY = \angle KPZ \quad \text{и} \quad \angle ZPQ + \angle AQP = 180^\circ.$$

Но это невозможно, поскольку точка Z лежит внутри треугольника APQ и

$$\angle ZPQ + \angle AQP \leqslant \angle APQ + \angle AQP = 150^\circ < 180^\circ.$$

Осталось вычислить площадь треугольника APQ. Пусть M и N — проекции точки K на лучи AP и AQ, где $KN = 2$ и $KM = 1$. Обозначим проекцию P на прямую AQ через C, а проекцию Q на прямую AP — через B (см. правый рисунок). Тогда $BQ = 2$, $PC = 4$ и

$$S_{APQ} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot BQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{PC}{\sin 30^\circ} \cdot BQ = 8. \quad \square$$

Решение 2. Пусть прямая, проходящая через точку K, пересекает стороны угла в точках X и Y, причем расстояния от K до AX и AY равны соответственно 2 и 1. Положим $x = AX$, $y = AY$. Тогда

$$\tfrac{1}{4}\, xy = \tfrac{1}{2} \cdot AX \cdot AY \cdot \sin 30^\circ = S_{AXY} = S_{AXK} + S_{AKY} = \tfrac{1}{2}\,(2x + y) \iff y(x-2) = 4x.$$

Очевидно, что $x > 2$. Площадь треугольника AXY выражается функцией

$$S(x) = \frac{x^2}{x-2}, \quad \text{откуда} \quad S'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

Значит, производная S отрицательна при $x \in (2, 4)$ и положительна при $x > 4$. Поэтому наименьшее значение S достигается при $x = 4$ и равно 8. $\square$

5. *В клетках таблицы* 75×75 *расставлены попарно различные натуральные числа. Каждое из них имеет не более трех различных простых делителей. Известно, что для любого числа* a *из таблицы*

в одной строке или в одном столбце с ним найдется такое число b, что a и b не являются взаимно простыми. Какое наибольшее количество простых чисел может быть в таблице?

Ответ: 4218.

Решение. Будем говорить, что составное число a *обслуживает* простое число p, если числа a и p не взаимно просты (то есть a делится на p). Для каждого простого числа в таблице есть обслуживающее его составное. Поскольку каждое составное число имеет не более трех различных простых делителей, оно обслуживает не более трех простых чисел. Таким образом, если таблица содержит n составных чисел, то простых — не более $3n$. Следовательно, общее количество чисел в таблице не превосходит $4n$. Тогда

$$4n \geqslant 75^2 \Longrightarrow n \geqslant \frac{75^2}{4} = 1406\frac{1}{4} \Longrightarrow n \geqslant 1407 \Longrightarrow 75^2 - n \leqslant 75^2 - 1407 = 4218.$$

Значит, количество простых чисел в таблице не превосходит 4218.

Покажем теперь, как можно разместить в таблице 4218 простых чисел. Воспользуемся следующим алгоритмом заполнения строк и столбцов.

1) Первые 54 позиции заполняем различными простыми числами $p_1, p_2, \ldots, p_{54}$. Эти числа должны быть новыми, то есть не использовавшимися ранее в таблице.

2) В следующих 18 клетках размещаем числа $p_1p_2p_3, p_4p_5p_6, \ldots, p_{52}p_{53}p_{54}$.

3) Последние три позиции оставляем незаполненными.

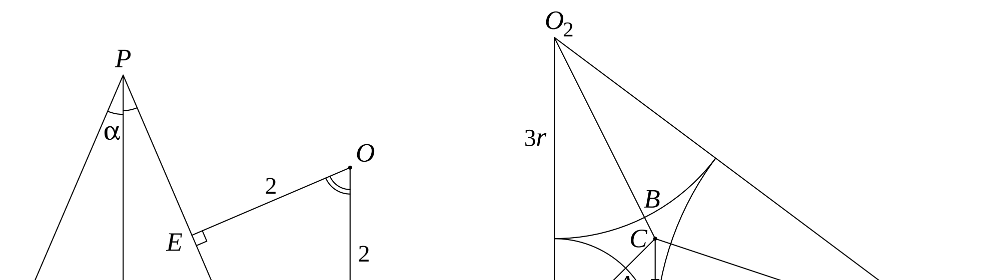
Применим этот алгоритм последовательно сначала к строкам $1, 2, \ldots, 75$, а затем к трем последним столбцам. Тем самым мы расставим $75 \cdot 54 + 3 \cdot 54 = 4212$ простых числа. Осталось заполнить клетки квадрата 3×3 из правого нижнего угла. Выберем новые простые числа $q_1, \ldots, q_6$ и расставим их так:

$$\begin{pmatrix} q_1q_2 & q_3q_4 & q_5q_6 \\ q_1 & q_3 & q_5 \\ q_2 & q_4 & q_6 \end{pmatrix}.$$

В итоге мы разместим 4218 различных простых чисел. $\square$

6. *На столе стоят на основаниях три конуса, касаясь друг друга. Высоты у конусов одинаковые, а радиусы их оснований равны $2r$, $3r$ и $10r$. На стол положили шар радиуса 2, касающийся всех конусов. Оказалось, что центр шара равноудален от всех точек касания конусов. Найдите r.*

Ответ: 1.



Решение: Пусть O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов, O — центр шара, R — радиус шара, C — точка касания шара со столом, 2α и 2β — углы при вершине первого и второго конусов, A и B — точки пересечения отрезков CO_1 и CO_2 с основаниями конусов. На левом рисунке показано сечение первого конуса плоскостью COO_1. Касание шара с первым конусом означает, что перпендикуляр OE, опущенный из точки O на образующую PA, равен R. Действительно, в этом случае шар и конус касаются плоскости, проходящей через образующую PA перпендикулярно сечению, и лежат по разные стороны от нее. Тогда шар касается прямых AC и AE в точках C и E, откуда

$$OC = OE = 2, \quad AC = AE \quad \text{и} \quad \angle AOC = \tfrac{1}{2}\angle EOC = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}.$$

Поэтому $AC = 2\operatorname{tg}\big(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\big)$ и, аналогично, $BC = 2\operatorname{tg}\big(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\big)$. Положим

$$\lambda = \operatorname{tg}\big(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2}\big), \quad \mu = \operatorname{tg}\big(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\beta}{2}\big).$$

Так как $O_1O_2 = 5r$, $O_1O_3 = 12r$, $O_2O_3 = 13r$, треугольник $O_1O_2O_3$ является прямоугольным. В силу условия точка C равноудалена от точек касания оснований конусов. Тогда C лежит на пересечении биссектрис треугольника $O_1O_2O_3$ и, значит, является центром его вписанной окружности, радиус которой равен $2r$. Вычисляя CO_1^2 и CO_2^2 двумя способами, мы получим

$$\begin{cases} (2r+2\lambda)^2 = 8r^2, \\ (3r+2\mu)^2 = 13r^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4\lambda^2 + 8\lambda r = 4r^2, \\ 4\mu^2 + 12\mu r = 4r^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + 2\lambda r - r^2 = 0, \\ \lambda^2 - \mu^2 = r\,(3\mu - 2\lambda) \end{cases} \tag{$*$}$$

(мы вычли второе уравнение из первого). Заметим, что

$$\frac{1}{\lambda} - \lambda = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = 2\operatorname{tg}\alpha \quad \text{и, аналогично,} \quad \frac{1}{\mu} - \mu = 2\operatorname{tg}\beta.$$

В силу равенства высот конусов справедливо соотношение $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому

$$1 - \mu^2 = \frac{3\mu}{2\lambda}\left(1 - \lambda^2\right) \quad \text{и} \quad \lambda^2 - \mu^2 = \lambda^2 - 1 + 1 - \mu^2 = \frac{\left(1 - \lambda^2\right)(3\mu - 2\lambda)}{2\lambda}.$$

Второе из уравнений $(*)$ дает

$$r = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{3\mu - 2\lambda} = \frac{1 - \lambda^2}{2\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right).$$

Из первого уравнения системы $(*)$ вытекает, что $\lambda = r\left(\sqrt{2} - 1\right)$. Исключая λ, мы получим

$$2r = \frac{\sqrt{2}+1}{r} - (\sqrt{2}-1)r \Longleftrightarrow \sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2}+1)r^2 \Longleftrightarrow r = 1. \quad \square$$