Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2015/2016 учебный год

Задания для 10-11 классов

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2015/2016 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Из указанных ниже парабол выберите те, по отношению к которым точки $A(-1,\,-1)$ и $B(0,\,2)$ лежат по одну сторону*

а) $y = 2x^2 + 4x$;

б) $y = x^2/2 - x - 3/2$;

в) $y = -x^2 + 2x - 1$;

г) $y = -x^2 - 4x - 3$;

д) $y = -x^2 + 3$;

е) среди перечисленных ответов нет верного.

Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

Ответ: а), в) и д).

Решение. Преобразуем уравнения парабол, выделив полный квадрат:

1) $2x^2 + 4x = 2(x+1)^2 - 2$ — вершиной параболы является точка с координатами $(-1,\,-2)$, ветви данной параболы направлены вверх; легко видеть, что обе заданные точки лежат внутри параболы;
2) $x^2/2 - x - 3/2 = (x-1)^2/2 - 2$ — в этом случае вершиной является точка $(1,\,-2)$, ветви также направлены вверх, но левая ветвь пересекает ось абсцисс в точке -1, таким образом, заданные точки лежат по разные стороны от параболы;
3) $-x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$ — вершина находится в точке $(1,\,0)$, ветви направлены вниз, левая ветвь пересекает ось ординат в точке -1, следовательно, обе заданные точки лежат снаружи параболы;
4) $-x^2 - 4x - 3 = -(x+2)^2 + 1$ — вершина в точке $(-2,\,1)$, ветви направлены вниз, правая ветвь пересекает ось абсцисс в точке -1, поэтому заданные точки лежат по разные стороны от параболы;
5) у параболы $-x^2 + 3$ вершина находится в точке $(0,\,3)$, ветви направлены вниз, так что и в этом случае обе заданные точки лежат внутри параболы.

2. (10 баллов) *В треугольнике ABC проведены медианы AM и BK. Известно, что $AM = 3$, $BK = 5$. Определите, какое из перечисленных утверждений является верным:*

а) длина стороны AB может быть равна 6;

б) периметр треугольника ABC может быть равен 22;

в) по данным задачи невозможно оценить ни периметр треугольника, ни сторону AB;

г) среди перечисленных ответов нет верного.

Отметьте правильный вариант ответа, решение приводить не нужно.

Ответ: г).

Решение. Пусть O — точка пересечения медиан. Как известно, точкой пересечения медианы делятся в отношении $2:1$, считая от вершины, поэтому $BO = 10/3$, $OK = 5/3$, $AO = 2$, $OM = 1$. Проанализируем теперь сформулированные в задаче утверждения.

Случай а). Воспользуемся неравенством треугольника для AOB: $AB < AO + OB = 16/3 < 6$. Следовательно, утверждение этого пункта неверно.

Случай б). Здесь для оценки периметра воспользуемся неравенством треугольника для BOM и AOK:

$$AB + BC + CA = AB + 2BM + 2AK < \frac{16}{3} + 2 \cdot \frac{11}{3} + 2 \cdot \frac{13}{3} = 21\frac{1}{3} < 22.$$

Поэтому утверждение этого пункта также неверно.

Случай в). Воспользовавшись неравенством треугольника, можно получить оценки сверху и для стороны AB, и для периметра. Утверждение неверно.

Отсюда получаем истинность утверждения пункта г).

3. (20 баллов) *Будем говорить, что число имеет вид $\overline{aba}$, если у него первая и третья цифра одинаковы; вторая при этом обязана быть другой. Например, 101 и 292 имеют такой вид, а 222 и 123 не имеют. Аналогичным образом определим вид числа $\overline{abcabd}$. Сколько нечётных чисел вида $\overline{adabcd}$ делятся на 5?*

Ответ: 448.

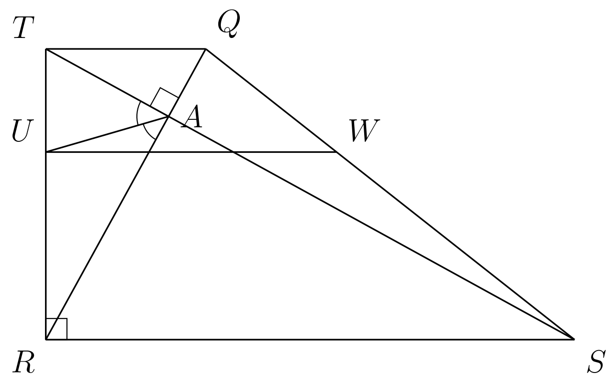
Решение. Нечётные числа, делящиеся на 5, — это числа, оканчивающиеся на 5, таким образом, для d имеем только один вариант. Для a имеем 8 вариантов, так как число не может начинаться с нуля, также a не может быть равно d. Цифра b не может быть равна a или d, и других ограничений на неё нет — получаем 8 вариантов значений. Аналогично, для цифры c — 7 вариантов. Отсюда получаем, что искомых чисел всего $1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$.

4. (20 баллов) *График некоторой четной функции проходит через точки с координатами $(-1;\, 0)$, $(0{,}5;\, 2{,}5)$ и $(3;\, 0)$. Укажите пример формулы, которая описывает такую функцию (достаточно дать только ответ, решение приводить не нужно).*

Ответ: Например,

$$f(x)=\begin{cases} 2{,}5 & \text{при } \ x=\pm\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } \ x\in\left(-\infty,\,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\,+\infty\right). \end{cases}$$

5. (30 баллов) *Диагонали трапеции $RSQT$ с основаниями RS и QT пересекаются в точке A под прямым углом. Известно, что основание RS больше основания QT и угол R прямой. Биссектриса угла RAT пересекает RT в точке U, а прямая, проходящая через точку U параллельно RS, пересекает прямую SQ в точке W. Докажите, что $UW = RT$.*



Первое решение. Найдем выражение для UW, используя равенство площадей трапеций:

$$S_{RTQS} = S_{RUWS} + S_{UTQW} \Leftrightarrow$$
$$(RS+TQ)\cdot(TU+UR) = (RS+UW)\cdot UR + (UW+TQ)\cdot TU \Leftrightarrow$$
$$RS\cdot TU + TQ\cdot UR = UW\cdot(UR+TU) \Leftrightarrow$$
$$UW = \frac{RS\cdot TU}{TR} + \frac{TQ\cdot UR}{TR}\,.$$

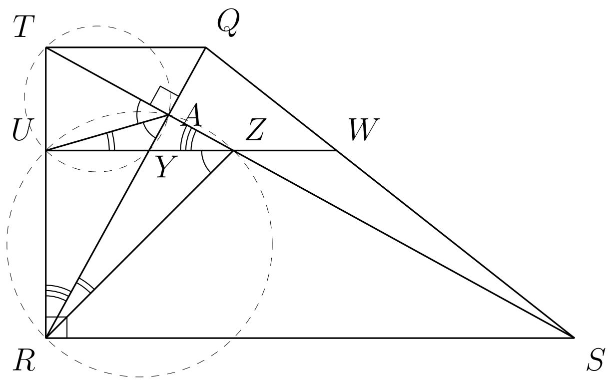
Нетрудно видеть, что треугольники QAT, QTR, TAR, TRS и RAS подобны по трем углам (все они прямоугольные и, кроме того, треугольники QTA и RTQ имеют общий угол RQT, треугольники RTQ и TAR — общий угол TRA, треугольники TAR и TRS — общий угол TSR). Отсюда получаем, что $\frac{AT}{AR} = \frac{TR}{RS} = \frac{TQ}{TR}$. По условию AU — биссектриса угла A в треугольнике TAR, поэтому верно равенство $\frac{UT}{UR} = \frac{AT}{AR}$.

Подставим полученные соотношения в выражение для UW:

$$UW = \frac{RS}{TR}\cdot UT + \frac{TQ}{TR}\cdot UR =$$
$$= \frac{RS}{TR}\cdot\frac{TR\cdot UR}{RS} + \frac{TQ}{TR}\cdot\frac{UT\cdot TR}{TQ} =$$
$$= UR + UT = TR\,.$$

Второе решение. Обозначим через Y — пересечение RQ и UW, а через Z — пересечение ST и UW. Рассмотрим четырехугольник $UTAY$: у него углы U и

A равны 90°, поэтому вокруг него можно описать окружность; а поскольку AU — биссектриса, то $UT = UY$.



Рассмотрим четырехугольник $RUAZ$: он образован двумя прямоугольными треугольниками (RUZ и RAZ), имеющими общую гипотенузу, т.е. вокруг него тоже можно описать окружность. Нетрудно видеть, что $\angle UAR = \angle UZR$, $\angle URA = \angle UZA$, $\angle AUZ = \angle ARZ$, а $\angle AUZ + \angle AZU = \angle UAT$ (из треугольника UAZ). Следовательно, в треугольнике RUZ равны углы ZRU и RZU, а поэтому равны и стороны UR и UZ. Осталось заметить, что $UY = ZW$, т.к. коэффициент подобия треугольников RUY и RTQ равен коэффициенту подобия треугольников SWZ и SQT.

Таким образом, $UW = UZ + ZW = RU + UY = RU + UT = RT$.

6. (30 баллов) *В треугольнике XYZ сторона YZ в два раза больше стороны XZ. На стороне YZ выбрана точка W так, что углы ZXW и ZYX равны. Прямая XW пересекает биссектрису внешнего угла при вершине Z в точке A. Докажите, что угол YAZ прямой.*

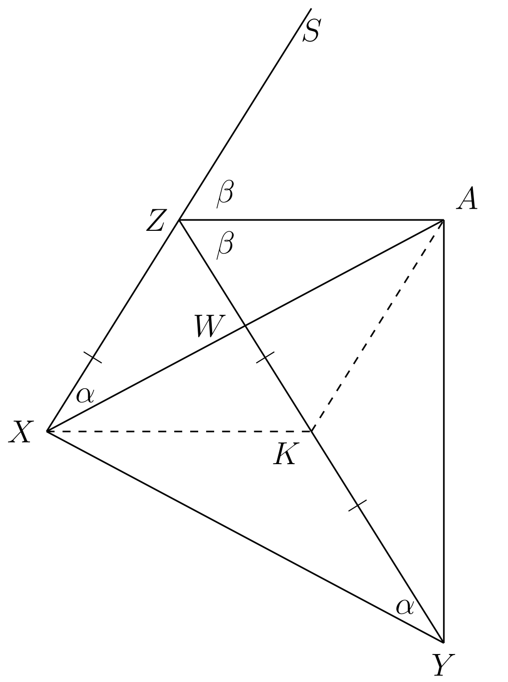
Решение. Заметим, что треугольники ZWX и ZXY подобны по двум углам (угол Z общий, а углы α равны по условию). Отсюда получаем, что

$$\frac{WZ}{ZX} = \frac{ZX}{ZY} = \frac{XW}{XY} = \frac{1}{2},$$

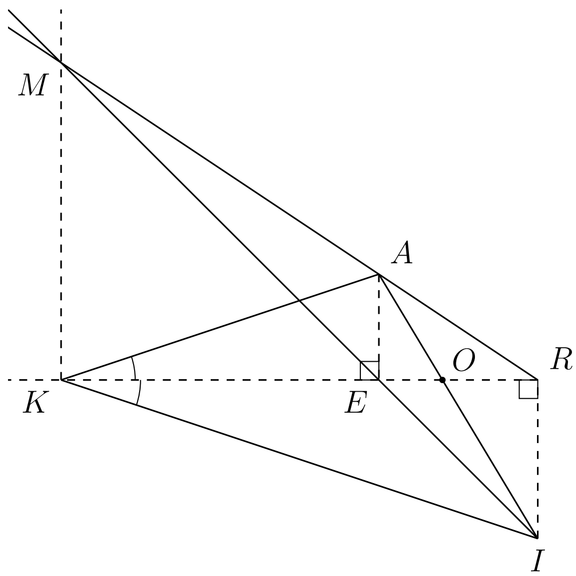
т.е. $ZW = \frac{1}{4}ZY$.

Пусть XK — биссектриса угла WXY, точка K лежит на WY. Тогда $\frac{KW}{KY} = \frac{XW}{XY} = \frac{1}{2}$, т.е. $KW = \frac{1}{3}YW = \frac{1}{4}YZ$ и $ZK = KY$. Далее, пусть S — точка на продолжении отрезка XZ за точку Z. По условию, $\angle SZA = \frac{1}{2}(\angle ZXY + \angle XYZ) = \angle ZXK$. Следовательно, $XK \parallel ZA$, и поэтому треугольники XWK и ZWA равны по второму признаку ($ZW = WK$, $\angle XWK = \angle ZWA$ как вертикальные, $\angle XKW = \angle WZA$ как накрест лежащие при параллельных прямых). Отсюда получаем, что $XK = ZA$, а это дает равенство треугольников XZK и ZKA по первому признаку.

Следовательно, $KA = XZ$, т.е. мы получили, что $KA = KZ = KY$. Поэтому треугольник YAZ — прямоугольный с прямым углом A.



7. (30 баллов) *В треугольнике KIA сторона KA меньше стороны KI, а точки R и E — основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла K из точек I и A соответственно. Докажите, что прямые IE, RA и перпендикуляр к KR, восстановленный в точке K, пересекаются в одной точке.*



Решение. Обозначим через M точку пересечения прямых IE и RA; она существует, т.к. по условию $KA < KI$ и, следовательно, $AE \neq RI$ и $AEIR$ не параллелограмм. И пусть O — точка пересечения биссектрисы угла K со стороной AI. Нетрудно видеть, что треугольники KAE и ARI подобны — они прямоугольные, а KR — биссектриса. Отсюда, $\frac{KA}{KI} = \frac{KE}{KR} = \frac{AE}{IR} = k$. Также $\frac{AO}{OI} = \frac{KA}{KI} = k$, т.к. KR —

биссектриса. Поскольку $AE \parallel RI$, то треугольники MAE и MRI подобны, и поэтому
$$\frac{AE}{RI} = \frac{MA}{MR} = \frac{ME}{MI} = k.$$
Теперь рассмотрим треугольники MKR и AER. У них угол R общий,
$$\frac{ER}{KR} = \frac{KR - KE}{KR} = 1 - k,$$
$$\frac{AR}{MR} = \frac{MR - MA}{MR} = 1 - k.$$
Следовательно, эти треугольники подобны и поэтому $\angle MKR = \angle AER = 90^\circ$.

8. (40 баллов) *На полоске написали по порядку числа от 1 до 1598 и разрезали её на несколько частей. Оказалось, что среднее арифметическое всех чисел первой части равно некоторому натуральному числу n, второй части — числу $2n$, третьей — числу $3n$ и т.д. Объясните при каких n это возможно.*

Решение. Рассмотрим несколько подряд идущих натуральных чисел. Если их четное количество, то они разбиваются на пары с равной нечетной суммой, следовательно их среднее арифметическое не является целым числом. Если же их нечетное количество, то их средним арифметическим является среднее число из этого набора. Откуда все части полоски состоят из нечетного количества чисел.

Среднее арифметическое чисел от 1 до k равно натуральному n, следовательно $k = 2n - 1$. Таким образом, первая полоска состоит из чисел от 1 до $2n - 1$, тогда вторая полоска состоит из единственного числа $2n$, первым числом третьей полоски является $2n + 1$, тогда последним $4n - 1$ (сумма крайних чисел должна равняться $6n$), тогда следующим числом будет $4n$, потом от $4n + 1$ до $6n - 1$ и так далее.

Таким образом, у нас чередуются последние числа полосок: $2n-1$, $2n$, $4n-1$, $4n$, $6n-1$, $6n$, $\ldots$, $2kn-1$, $2kn$. Так как число 1598 четное и является последним числом в некоторой полоске, то оно равно некоторому $2kn$. Откуда $kn = 799 = 17 \cdot 47$, то есть n может быть одним из делителей этого числа: 1, 17, 47, 799. Из решения ясно, что соответствующие примеры для каждого такого n найдутся.

9. (40 баллов) *Числа s_1, s_2, $\ldots$, s_{1008} таковы, что их сумма равна 2016^2. Известно, что*
$$\frac{s_1}{s_1+1} = \frac{s_2}{s_2+3} = \frac{s_3}{s_3+5} = \ldots = \frac{s_{1008}}{s_{1008}+2015}.$$
Найдите s_{17}.

Ответ: 132.

Решение. Заметим, что ни одно из s_i не равно нулю (иначе бы равнялись нулю все дроби $\frac{s_i}{s_i+2i-1}$, и, следовательно, все s_i должны были бы быть равны нулю, что противоречит тому, что их сумма равна 2016^2). Поэтому исходное условие равносильно условию

$$\frac{s_1+1}{s_1}=\frac{s_2+3}{s_2}=\frac{s_3+5}{s_3}=\ldots=\frac{s_{1008}+2015}{s_{1008}}\Leftrightarrow\frac{1}{s_1}=\frac{3}{s_2}=\frac{5}{s_3}=\ldots=\frac{2015}{s_{1008}}.$$

Из первого равенства выразим s_2 через s_1: $s_2=3s_1$; далее, аналогично, s_3 через s_1: $s_3=5s_1$; $\ldots s_{1008}=2015s_1$. Теперь имеем

$$\sum_{i=1}^{1008}s_i=\sum_{i=1}^{1008}(2i-1)s_1=s_1\cdot\frac{(1+2015)\cdot 1008}{2}=1008^2 s_1=2016^2.$$

Отсюда $s_1=4$ и, следовательно, $s_{17}=(2\cdot 17-1)\cdot 4=132$.