Олимпиада школьников СПбГУ по математике.

Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

Задания для 10-11 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный этап. 2015/2016 учебный год.

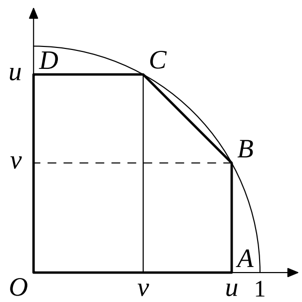
Вариант 1

1. *При каком наименьшем k можно отметить k клеток доски 10×11 так, что при любом размещении на доске трехклеточного уголка он задевает хотя бы одну отмеченную клетку?*

   Ответ: 50.

   Решение. Несложно заметить, что в любом квадрате 2×2 есть хотя бы две отмеченные клетки. Поскольку из доски 10×11 можно вырезать 25 таких квадратов, в ней должно быть не менее 50 отмеченных клеток. Пример с 50 отмеченными клетками получается, если отметить клетки, первая координата которых четна. $\square$

2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^8 + y^8 \leqslant 1$. Докажите неравенство $x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6 \leqslant \frac{\pi}{2}$.*



Решение 1. В силу четности достаточно рассмотреть неотрицательные x и y. Можно также считать, что $x \geqslant y$, иначе переставим x и y, увеличив левую часть неравенства. Из условия вытекает, что $x \leqslant 1$ и $y \leqslant 1$. Положим $u = x^6$, $v = y^6$ и рассмотрим пятиугольник $OABCD$ с вершинами в точках

$$O = (0,0),\ A = (u,0),\ B = (u,v),\ C = (v,u),\ D = (0,u)$$

(см. рисунок). Так как $u \leqslant 1$ и

$$u^2 + v^2 = x^{12} + y^{12} \leqslant x^8 + y^8 \leqslant 1,$$

пятиугольник содержится в четверти единичного круга с центром в O, лежащей в первом квадранте. Поэтому

$$\tfrac{\pi}{2} \geqslant 2S_{OABCD} = (u+v)(u-v) + 2uv = u^2 - v^2 + 2uv = x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6. \quad \square$$

Решение 2. В силу четности достаточно рассмотреть неотрицательные x и y. Положим

$$x = r\sqrt[6]{\cos t},\ y = r\sqrt[6]{\sin t}, \quad \text{где } r \geqslant 0,\ t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

По условию

$$1 \geqslant x^8 + y^8 = r^8\left(\cos^{\frac{4}{3}} t + \sin^{\frac{4}{3}} t\right) \geqslant r^8\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = r^8,$$

откуда $r \leqslant 1$. Поэтому

$$x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6 = r^{12}\left(\cos^2 t - \sin^2 t + 2\sin t \cos t\right) \leqslant \cos 2t + \sin 2t = \sqrt{2}\sin\left(2t + \tfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2} < \tfrac{\pi}{2}. \quad \square$$

Решение 3. Положим $u = x^6$ и $v = y^6$. Тогда

$$u^2 + v^2 = x^{12} + y^{12} \leqslant x^8 + y^8 \leqslant 1.$$

В силу неравенства Коши

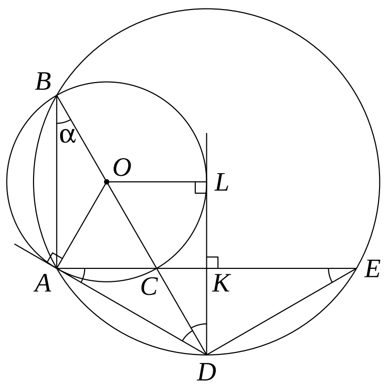
$$2uv = 2\big(\sqrt{2}-1\big)u \cdot \big(\sqrt{2}+1\big)v \leqslant \big(\sqrt{2}-1\big)u^2 + \big(\sqrt{2}+1\big)v^2.$$

Поэтому

$$u^2 - v^2 + 2uv \leqslant \sqrt{2}\left(u^2+v^2\right) \leqslant \sqrt{2} < \tfrac{\pi}{2}. \quad \square$$

3. *Дан прямоугольный треугольник ABC. На продолжении гипотенузы BC выбрана точка D так, что прямая AD — касательная к описанной окружности ω треугольника ABC. Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Оказалось, что биссектриса $\angle ADE$ касается окружности ω. В каком отношении точка C делит отрезок AE?*

Ответ: $AC : CE = 1 : 2$.



Решение. Пусть $\alpha = \angle ABD$, K и L — точки пересечения биссектрисы угла ADE с AE и ω соответственно. Угол между касательной AD к окружности ω и хордой AC равен вписанному углу, который опирается на AC, откуда $\angle DAE = \alpha$. Кроме того, вписанные углы AED и α опираются на хорду AD и потому равны. Тогда $\angle DAE = \angle AED = \alpha$ и треугольник ADE равнобедренный. Поэтому биссектриса DK является также его медианой и высотой. Значит, $AB \parallel DL$, поскольку прямые AB и DL перпендикулярны AE. Прямоугольные треугольники AOD и LOD равны по катету и гипотенузе, откуда $\angle ADO = \angle LDO = \angle ABD = \alpha$. Из прямоугольного треугольника ADK мы получаем, что $3\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Тогда $AD = 2DK$, и по свойству биссектрисы

$$\frac{CK}{AC} = \frac{DK}{AD} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$CE = EK + CK = AK + CK = AC + 2CK = 2AC. \quad \square$$

4. *На складе хранится 400 тонн грузов, причем вес каждого из них кратен центнеру и не превосходит 10 тонн. Известно, что любые два груза имеют разный вес. Какое наименьшее количество рейсов надо сделать на 10-тонном автомобиле, чтобы гарантированно перевезти эти грузы со склада?*

Ответ: 51.

Решение. Покажем, что за 51 рейс перевезти грузы можно всегда, даже если бы на складе были представлены все веса от 1 до 100 центнеров. Действительно, разобьем все грузы, кроме 50- и 100-центнерных, на 49 пар следующим образом:

$$(1,99), \quad (2,98), \quad (3,97), \quad \ldots, \quad (49,51).$$

Для их перевозки достаточно 49 рейсов, поскольку каждая пара помещается в автомобиль. Еще два рейса необходимо для перевозки грузов в 50 и 100 центнеров.

Покажем теперь, что за 50 рейсов перевести грузы можно не всегда. Пусть на складе хранятся грузы в 31 и $47, 48, \ldots, 100$ центнеров. Их суммарный вес равен $31 + \frac{54\cdot(47+100)}{2} = 4000$ центнеров. Никакие два груза весом от 50 до 100 тонн не могут быть перевезены вместе на одном автомобиле. Но таких грузов 51, поэтому потребуется не менее 51 рейса. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 2^n - 32$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 7. Найдите x.*

   Ответ: 2016 или 16352.

   Решение. Запишем x в виде $32 \cdot N$, где $N = 2^{n-5} - 1$. Один простой делитель x равен 2. Поэтому мы должны найти все N, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 7. Остатки от деления степеней двойки на 7 равны $2, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость N на 7 означает, что $n-5$ кратно 3, то есть $N = 2^{3m} - 1$. Если $m = 1$, то $N = 7$, что нам не подходит. При $m = 2$ и $m = 3$ мы получим соответственно $N = 7 \cdot 3^2$ и $N = 7 \cdot 73$, откуда $x = 2016$ и $x = 16352$. Покажем, что при $m > 3$ решений не будет. Рассмотрим два случая.

   1) *m нечетно.* Тогда
$$N = p \cdot q, \quad \text{где } p = 2^m - 1, \; q = 2^{2m} + 2^m + 1.$$
Заметим, что p и q взаимно просты, поскольку
$$3 = q - (2^{2m} - 1) - (2^m - 1) = q - p\,(2^m + 2)$$
и общим делителем p и q может быть только 3. Но p не кратно 3 при нечетном m.

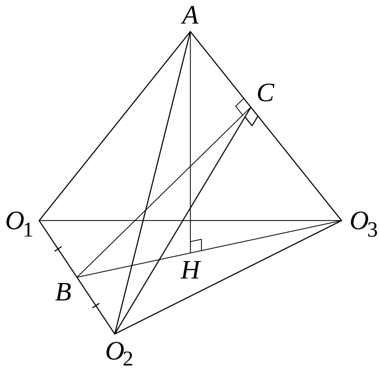
Одно из чисел p и q делится на 7. Если $p \,\vdots\, 7$, то $m \,\vdots\, 3$ и, повторяя предыдущие рассуждения для p вместо N, мы разложим p в произведение двух взаимно простых чисел, отличных от 1. Тогда N есть произведение трех взаимно простых чисел и, тем самым, имеет не менее трех различных простых делителей, что невозможно.

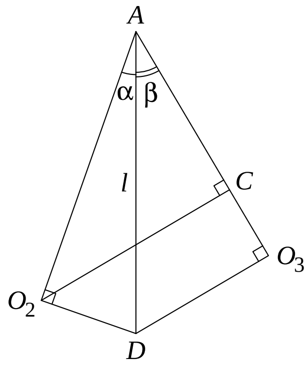
Пусть теперь $q \,\vdots\, 7$. Так как число q взаимно просто с p, оно не может иметь других простых делителей, откуда $q = 7^s$ при некотором натуральном s. Остаток от деления на 8 у 7^s такой же, как у $2^{2m} + 2^m + 1$, то есть 1, поскольку $m > 3$. Тогда s четно и q является точным квадратом. Но число $2^{2m} + 2^m + 1$ лежит строго между $\left(2^m\right)^2$ и $\left(2^m + 1\right)^2$ и потому точным квадратом быть не может.

2) *m четно.* Тогда $m = 2k$ при $k > 1$, и
$$N = p \cdot q, \quad \text{где } p = 2^{3k} - 1, \; q = 2^{3k} + 1.$$
Числа p и q взаимно просты, так как они нечетны и $q - p = 2$. Заметим, что число p раскладывается на два взаимно простых множителя. Действительно, при четном k запишем p как разность квадратов, а при нечетном воспользуемся разложением из 1). Значит, N есть произведение трех взаимно простых чисел, отличных от 1. Поэтому N имеет не менее трех различных простых делителей, что невозможно. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A и образующей $\sqrt{8}$ касаются друг друга внешним образом. У двух конусов угол между образующей и осью симметрии равен $\frac{\pi}{6}$, а у третьего он равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите объем пирамиды $O_1O_2O_3A$, где O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов.*

   Ответ: $\sqrt{\sqrt{3}+1}$.





Решение. Пусть $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $l = \sqrt{8}$, B — середина отрезка O_1O_2, AD — общая образующая второго и третьего конусов. Тогда

$$AO_1 = AO_2 = l\cos\alpha, \quad AO_3 = l\cos\beta = l\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Четырехугольник AO_2DO_3 вписан в окружность с диаметром AD, откуда по теореме синусов

$$O_1O_3 = O_2O_3 = AD\cdot\sin\angle O_2AO_3 = l\sin(\alpha+\beta).$$

Аналогичным образом

$$O_1O_2 = l\sin 2\alpha \quad \text{и} \quad BO_2 = l\sin\alpha\cos\alpha = l\,\tfrac{\sqrt{3}}{4}.$$

Опустим перпендикуляр BC на прямую AO_3. Заметим, что отрезки AB и O_3B перпендикулярны O_1O_2 как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Тогда отрезок O_1O_2 перпендикулярен плоскости ABO_3 и, значит, прямой AO_3. Поэтому ребро AO_3 перпендикулярно плоскости O_1O_2C и, в частности, отрезку CO_2. Поэтому

$$CO_2 = AO_2\cdot\sin\angle O_2AC = l\cos\alpha\sin(\alpha+\beta).$$

По теореме Пифагора мы получаем

$$BC = \sqrt{CO_2^2 - BO_2^2} = l\cos\alpha\sqrt{\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha} = l\cos\alpha\sqrt{\frac{\cos 2\alpha - \cos 2(\alpha+\beta)}{2}} = \frac{l\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}+1}}{4}.$$

Пусть V — объем пирамиды $O_1O_2O_3A$, AH — ее высота. Тогда

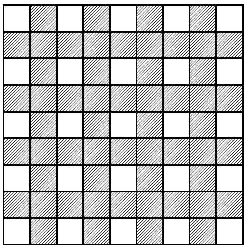
$$V = \tfrac{1}{6}\cdot O_1O_2\cdot BO_3\cdot AH = \tfrac{1}{3}\cdot O_1O_2\cdot S_{ABO_3} = \tfrac{1}{3}\cdot BO_2\cdot AO_3\cdot BC =$$
$$= \frac{l^3}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1} = \frac{l^3}{16\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}+1} = \sqrt{\sqrt{3}+1}. \quad \square$$

Вариант 2

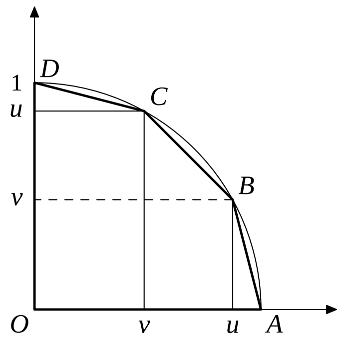
1. *При каком наименьшем k можно отметить k клеток доски 9×9 так, что при любом размещении на доске трехклеточного уголка он задевает хотя бы две отмеченные клетки?*

Ответ: 56.

Решение. Несложно заметить, что в любом квадрате 2×2 должно быть отмечено не менее трех клеток, а в каждом прямоугольнике 1×2 — не менее двух. Поскольку из доски 9×9 можно вырезать 16 квадратов 2×2 и 8 прямоугольников 1×2, всего должно быть отмечено по крайней мере $16 \cdot 3 + 8 = 56$ клеток. Пример с 56 отмеченными клетками показан на рисунке. $\square$



2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^4 + y^4 \leqslant 1$. Докажите неравенство $x^6 - y^6 + 2y^3 < \frac{\pi}{2}$.*



Решение 1. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $x \geqslant y \geqslant 0$. Положим $u = x^3$, $v = y^3$ и рассмотрим пятиугольник $OABCD$ с вершинами в точках

$$O = (0,0),\ A = (1,0),\ B = (u,v),\ C = (v,u),\ D = (0,1)$$

(см. рисунок). Так как $v \leqslant u \leqslant 1$ и

$$u^2 + v^2 \leqslant u^{\frac{4}{3}} + v^{\frac{4}{3}} = x^4 + y^4 \leqslant 1,$$

пятиугольник содержится в четверти единичного круга с центром в O, лежащей в первом квадранте. Поэтому

$$\tfrac{\pi}{2} \geqslant 2S_{OABCD} = (u+v)(u-v) + 2uv + 2v(1-u) = u^2 - v^2 + 2v = x^6 - y^6 + 2y^3. \quad \square$$

Решение 2. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $x \geqslant y \geqslant 0$. Положим $u = x^3$, $v = y^3$. Тогда $v \leqslant u \leqslant 1$ и

$$u^2 + v^2 \leqslant u^{\frac{4}{3}} + v^{\frac{4}{3}} = x^4 + y^4 \leqslant 1.$$

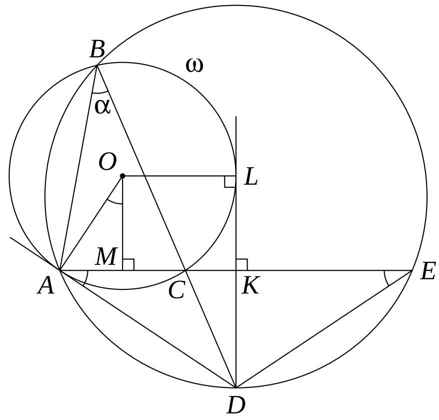
Отсюда

$$u^2 - v^2 + 2v \leqslant 1 + 2v - 2v^2 \leqslant \tfrac{3}{2} < \tfrac{\pi}{2}\,,$$

поскольку наибольшее значение трехчлена $1 + 2v - 2v^2$ достигается при $v = \frac{1}{2}$. $\square$

3. *На продолжении стороны BC треугольника ABC взята точка D так, что прямая AD — касательная к описанной окружности ω треугольника ABC. Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E, причем $AC : CE = 1 : 2$. Оказалось, что биссектриса угла ADE касается окружности ω. Найдите углы треугольника ABC.*

Ответ: $30°, 60°, 90°$.



Решение 1. Пусть M — середина стороны AC, K и L — точки пересечения биссектрисы угла ADE с AE и ω соответственно. Угол между касательной AD к окружности ω и хордой AC равен вписанному углу, который опирается на AC, откуда $\angle DAE = \angle ABD$. Кроме того, вписанные углы ABD и AED опираются на хорду AD и потому равны. Тогда $\angle DAE = \angle AED$, то есть треугольник ADE — равнобедренный. Поэтому биссектриса DK треугольника ADE является также его медианой и высотой. В частности, $DK \perp AE$, откуда $OL \parallel AE$. Тогда

$$AO = OL = MK = 2AM, \quad \text{откуда } \angle ABC = \angle AOM = 30°.$$

Значит, $\angle ADK = 60°$, и равнобедренный треугольник ADL оказывается равносторонним. Поэтому

$$\angle LBC = \angle LAC = \angle LAD - \angle KAD = 30° = \angle ABC,$$

то есть BD — биссектриса угла $\angle ABL$. Таким образом, C является серединой дуги AL, откуда DB — биссектриса угла $\angle ADL$. Значит, $\angle KDB = 30°$. Тогда $\angle ACB = 60°$, а оставшийся угол в треугольнике равен $90°$. $\square$

Решение 2. Пусть $\alpha = \angle ABC$, r — радиус ω, K и L — точки пересечения биссектрисы угла ADE с AE и ω соответственно. Угол между касательной AD к окружности ω и хордой AC равен вписанному углу, который опирается на AC, откуда $\angle DAE = \angle ABD$. Кроме того, вписанные углы ABD и AED опираются на хорду AD и потому равны. Тогда $\angle DAE = \angle AED$, то есть треугольник ADE — равнобедренный. Поэтому биссектриса DK треугольника ADE является также его медианой и высотой. В частности, $DK \perp AE$, откуда $OL \parallel AE$. Тогда

$$r\sin\alpha + r = AK = KE = \tfrac{1}{2}AE = \tfrac{3}{2}AC = 3r\sin\alpha, \quad \text{откуда } \sin\alpha = \tfrac{1}{2}.$$

Заметим, что $\alpha < \angle ABL = \frac{1}{2}\angle AOL < \frac{\pi}{2}$, поскольку четырехугольник $DAOL$ вписанный. Поэтому $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Кроме того,

$$CK = AK - AC = AK - \tfrac{2}{3}AK = \tfrac{1}{3}KE,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\angle ACB = \operatorname{tg}\angle DCK = \frac{DK}{CK} = 3\cdot\frac{DK}{KE} = 3\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}.$$

Поэтому $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ и $\angle BAC = \pi - \alpha - \angle ACB = \frac{\pi}{2}$. $\square$

4. *В кинотеатр пришло 50 зрителей, суммарный возраст которых равен 1555 лет, причем среди них нет одногодков. Для какого наибольшего k можно гарантированно выбрать 16 зрителей, суммарный возраст которых не меньше k лет?*

Ответ: 776.

Решение. Покажем, что $k \geqslant 776$, то есть суммарный возраст 16 самых старших зрителей всегда не меньше 776. Расположим зрителей в порядке увеличения возраста, и пусть a_i — число лет i-му из них. Поскольку среди зрителей нет одногодков, мы получим

$$a_1 \leqslant a_2 - 1 \leqslant a_3 - 2 \leqslant \ldots \leqslant a_{50} - 49,$$

то есть числа $b_i = a_i - (i-1)$ возрастают. Кроме того,

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{50} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{50} - (0 + 1 + 2 + \ldots + 49) = 1555 - \frac{49 \cdot 50}{2} = 330,$$

откуда среднее арифметическое чисел b_k равно $\frac{330}{50} = 6,6$. В силу возрастания чисел b_i найдется такой индекс m, что $b_i \leqslant 6$ при $i \leqslant m$ и $b_i \geqslant 7$ при $i > m$. Если $m \leqslant 34$, то

$$b_{35} + b_{36} + \ldots + b_{50} \geqslant 16 \cdot 7 = 112,$$

а при $m > 34$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{34} \leqslant 34 \cdot 6 = 204 \quad \text{и} \quad b_{35} + b_{36} + \ldots + b_{50} \geqslant 330 - 204 = 126 > 112.$$

В обоих случаях

$$a_{35} + a_{36} + \ldots + a_{50} = b_{35} + b_{36} + \ldots + b_{50} + (34 + 35 + \ldots + 49) \geqslant 112 + \frac{16 \cdot (34 + 49)}{2} = 776.$$

Покажем теперь, что $k \leqslant 776$. Мы должны привести пример, когда суммарный возраст 16 самых старших зрителей равен 776. Пусть в кинотеатр пришли люди, которым $6, 7, \ldots, 25$ и $27, 28, \ldots, 56$ лет. Их суммарный возраст равен $\frac{51 \cdot (6+56)}{2} - 26 = 1555$, а суммарный возраст 16 самых старших из них равен $41 + 42 + \ldots + 56 = \frac{16 \cdot (41+56)}{2} = 776$. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 2^n - 32$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 3. Найдите x.*

Ответ: 480 или 2016.

Решение. Запишем x в виде $32 \cdot N$, где $N = 2^{n-5} - 1$. Один простой делитель x равен 2. Поэтому мы должны найти все N, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 3. Делимость N на 3 означает, что $n - 5$ четно, то есть $N = 2^{2m} - 1$. Если $m = 1$, то $N = 3$, что нам не подходит. При $m = 2$ и $m = 3$ мы получим соответственно $N = 3 \cdot 5$ и $N = 3^2 \cdot 7$, откуда $x = 480$ и $x = 2016$. Покажем, что при $m > 3$ решений не будет. Заметим, что

$$N = p \cdot q, \quad \text{где } \ p = 2^m - 1, \ \ q = 2^m + 1.$$

Числа p и q взаимно просты, так как они нечетны и $q - p = 2$. Одно их них кратно 3. Если $p \,\vdots\, 3$, то m четно, и мы можем разложить p в произведение двух взаимно простых чисел, отличных от 1, тем же способом, что и N. Тогда N есть произведение трех взаимно простых чисел и, тем самым, имеет не менее трех различных простых делителей, что невозможно.

Пусть теперь $q \,\vdots\, 3$. Так как число q взаимно просто с p, оно не может иметь других простых делителей. Отсюда $q = 3^s$ и $2^m + 1 = 3^s$ при некотором натуральном s. Рассмотрим два случая.

1) *s четно.* Тогда $s = 2k$, причем $k > 1$, так как $m > 3$. Поэтому

$$2^m = (3^k - 1)(3^k + 1).$$

В правой части равенства стоит произведение соседних четных чисел, бо́льших 4. Но одно из них не делится на 4 и потому не является степенью двойки, что невозможно.

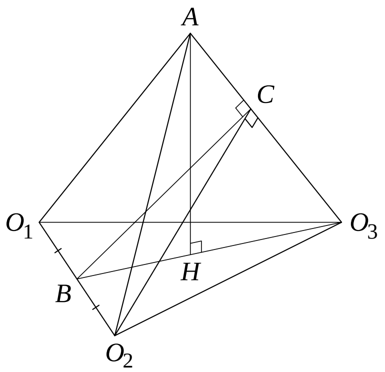
2) *s нечетно.* Тогда $s = 2k+1$ при некотором натуральном k, и

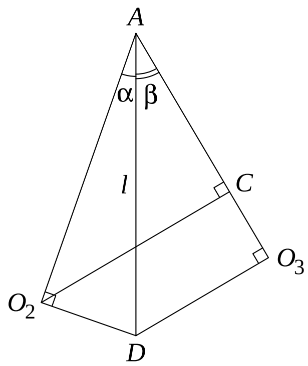
$$2^m - 2 = 3^{2k+1} - 3 = 3\,(3^k - 1)(3^k + 1).$$

Правая часть этого равенства кратна 4, так как содержит два четных множителя, а левая часть при $m > 3$ не делится на 4. Значит, этот случай также невозможен. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A и образующей 6 касаются друг друга внешним образом. У двух конусов угол между образующей и осью симметрии равен $\frac{\pi}{8}$, а у третьего он равен $\frac{\pi}{4}$. Найдите объем пирамиды $O_1O_2O_3A$, где O_1, O_2, O_3 — центры оснований конусов.*

Ответ: $9\sqrt{\sqrt{2}+1}$.





Решение. Пусть $\alpha = \frac{\pi}{8}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $l = 6$, B — середина отрезка O_1O_2, AD — общая образующая второго и третьего конусов. Тогда

$$AO_1 = AO_2 = l\cos\alpha, \quad AO_3 = l\cos\beta = l\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Четырехугольник AO_2DO_3 вписан в окружность с диаметром AD, откуда по теореме синусов

$$O_1O_3 = O_2O_3 = AD\cdot\sin\angle O_2AO_3 = l\sin(\alpha+\beta).$$

Аналогичным образом

$$O_1O_2 = l\sin 2\alpha \quad \text{и} \quad BO_2 = l\sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{l}{2}\sin 2\alpha = l\,\tfrac{\sqrt{2}}{4}.$$

Опустим перпендикуляр BC на прямую AO_3. Заметим, что отрезки AB и O_3B перпендикулярны O_1O_2 как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Тогда отрезок O_1O_2 перпендикулярен плоскости ABO_3 и, значит, прямой AO_3. Поэтому ребро AO_3 перпендикулярно плоскости O_1O_2C и, в частности, отрезку CO_2. Поэтому

$$CO_2 = AO_2\cdot\sin\angle O_2AC = l\cos\alpha\sin(\alpha+\beta).$$

По теореме Пифагора мы получаем

$$BC = \sqrt{CO_2^2 - BO_2^2} = l\cos\alpha\sqrt{\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\alpha} = l\cos\alpha\sqrt{\frac{\cos 2\alpha - \cos 2(\alpha+\beta)}{2}} =$$

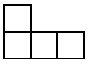
$$= l\cos\tfrac{\pi}{8}\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}}{2}} = l\sqrt{\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos^2\tfrac{\pi}{8}} = l\sqrt{\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\cos\tfrac{\pi}{4}\right)} = \tfrac{l\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}.$$

Пусть V — объем пирамиды $O_1O_2O_3A$, AH — ее высота. Тогда

$$V = \tfrac{1}{6}\cdot O_1O_2\cdot BO_3\cdot AH = \tfrac{1}{3}\cdot O_1O_2\cdot S_{ABO_3} = \tfrac{1}{3}\cdot BO_2\cdot AO_3\cdot BC =$$

$$= \frac{l^3}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+1} = \frac{l^3}{24}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+1} = 9\sqrt{\sqrt{2}+1}. \quad \square$$

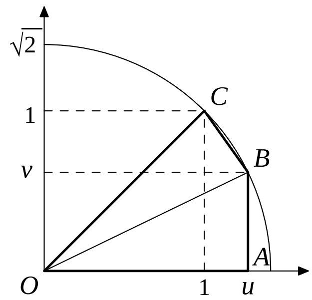
Вариант 3

1. *При каком наименьшем k можно так отметить k клеток доски 12×12, что при любом размещении на доске четырехклеточной фигурки*  *она задевает хотя бы одну отмеченную клетку? (Фигурку можно поворачивать и переворачивать.)*

   Ответ: 48.

Решение. Несложно заметить, что в любом прямоугольнике 2×3 есть хотя бы две отмеченные клетки. Поскольку доска 12×12 разрезается на 24 таких прямоугольника, в ней должно быть не менее 48 отмеченных клеток. Пример с 48 отмеченными клетками получается, если отметить клетки, сумма координат которых делится на 4. $\square$

2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^8 + y^8 \leqslant 2$. Докажите неравенство $x^2y^2 + \left|x^2 - y^2\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$.*



Решение 1. Положим $u = x^2$, $v = y^2$. По условию

$$4 \geqslant 2\left(u^4 + v^4\right) \geqslant \left(u^2 + v^2\right)^2, \quad \text{откуда } \ u^2 + v^2 \leqslant 2.$$

В силу симметрии неравенства можно считать $u \geqslant v$. Рассмотрим четырехугольник $OABC$ (см. рисунок) с вершинами в точках

$$O = (0,0),\ A = (u,0),\ B = (u,v),\ C = (1,1)$$

Заметим, что $u - v = 2\,S_{OBC}$, поскольку $OC = \sqrt{2}$, а $\frac{u-v}{\sqrt{2}}$ есть расстояние от B до прямой OC. Таким образом, $uv + u - v = 2\,S_{OABC}$. Осталось заметить, что площадь $OABC$ не превосходит площади сектора радиуса $\sqrt{2}$ раствора $\frac{\pi}{4}$, которая равна $\frac{\pi}{4}$. $\square$

Решение 2. Положим $u = x^2$, $v = y^2$. В силу условия

$$4 \geqslant 2\left(u^4 + v^4\right) \geqslant \left(u^2 + v^2\right)^2, \quad \text{откуда } \ u^2 + v^2 \leqslant 2.$$

Тогда

$$uv + |u - v| = \frac{u^2+v^2}{2} + |u - v| - \frac{(u-v)^2}{2} \leqslant 1 + |u - v| - \frac{|u-v|^2}{2} = \frac{1}{2}\left(3 - (|u - v| - 1)^2\right) \leqslant \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

3. *На высоте BH треугольника ABC отмечена некоторая точка D. Прямая AD пересекает сторону BC в точке E, прямая CD пересекает сторону AB в точке F. Точки G и J являются проекциями соответственно точек F и E на сторону AC. Площадь треугольника HEJ вдвое больше площади треугольника HFG. В каком отношении высота BH делит отрезок FE?*

   Ответ: $\sqrt{2} : 1$, считая от точки E.

Решение 1. Пусть T — точка пересечения AE и FG, M — точка пересечения CF и EJ, K — точка пересечения BH и FE (см. рисунок). Так как треугольники FDT и MDE подобны, по теореме Фалеса

$$\frac{EM}{FT} = \frac{DE}{DT} = \frac{HJ}{GH}.$$

Треугольники AFT и ABD подобны с коэффициентом, равным отношению их высот. Поэтому

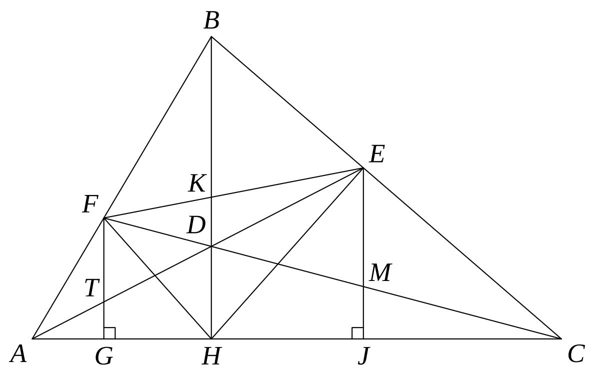
$$\frac{FT}{BD} = \frac{AG}{AH} = \frac{FG}{BH}, \quad \text{то есть} \quad \frac{FG}{FT} = \frac{BH}{BD}.$$

Аналогичным образом получаем, что $\frac{EJ}{EM} = \frac{BH}{BD}$. Тогда

$$\frac{FG}{FT} = \frac{EJ}{EM}, \quad \text{откуда} \quad \frac{EJ}{FG} = \frac{EM}{FT} = \frac{HJ}{GH}.$$

Значит, прямоугольные треугольники HEJ и HFG подобны. В силу теоремы Фалеса

$$\frac{EK}{KF} = \frac{HJ}{GH} = \sqrt{\frac{S_{HEJ}}{S_{HFG}}} = \sqrt{2}. \quad \square$$



Решение 2. Пусть $\lambda = \frac{GH}{HA}$, $\mu = \frac{HJ}{CH}$, K — точка пересечения BH и FE. Заметим, что

$$GF = (1-\lambda)\cdot BH, \quad EJ = (1-\mu)\cdot BH.$$

В силу теоремы Чевы

$$1 = \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CH}{HA} = \frac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\mu}{1-\mu}\cdot\frac{CH}{HA} = \frac{1-\lambda}{1-\mu}\cdot\frac{\mu\cdot CH}{\lambda\cdot HA} = \frac{GF}{EJ}\cdot\frac{HJ}{GH}.$$

Тогда $\frac{HJ}{GH} = \frac{EJ}{GF}$, откуда вытекает подобие прямоугольных треугольников HEJ и HFG. В силу теоремы Фалеса

$$\frac{EK}{KF} = \frac{HJ}{GH} = \sqrt{\frac{S_{HEJ}}{S_{HFG}}} = \sqrt{2}. \quad \square$$

4. *На трибунах хоккейной арены несколько рядов по 168 мест в каждом ряду. На финальный матч в качестве зрителей пригласили 2016 учеников нескольких спортивных школ, не более 40 от каждой школы. Учеников любой школы требуется разместить на одном ряду. Какое наименьшее количество рядов должно быть на арене, чтобы это в любом случае удалось сделать?*

Ответ: 15.

Решение. Допустим, что 57 школ прислали на финальный матч по 35 учеников и одна школа — 21 ученика. Поскольку на одном ряду умещаются лишь четыре группы по 35 школьников, для размещения учеников 57 школ количество рядов должно быть не меньше $\frac{57}{4} = 14\frac{1}{4}$, то есть по крайней мере 15.

Покажем, что 15 рядов достаточно. Предположим, что на трибуне есть один большой ряд, разделенный проходами на сектора по 168 мест. Посадим на этот большой ряд, игнорируя проходы, сначала учеников первой школы, затем второй, и так далее. В результате будет полностью занято 12 секторов. При такой рассадке на двух секторах могут оказаться ученики не более 11 школ. Так как любые четыре школы помещаются на одном секторе, для рассадки этих оставшихся учеников достаточно трех секторов. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 9^n - 1$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 13. Найдите x.*

Ответ: 728.

Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 13. Остатки от деления степеней 9 на 13 равны $9, 3, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 13 означает, что n кратно 3, то есть $x = 9^{3m} - 1$. Отсюда

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 9^m - 1, \;\; q = 9^{2m} + 9^m + 1.$$

Заметим, что числа p и q взаимно просты. Действительно, если число r делит p и q, то оно делит и 3, так как

$$3 = q - (9^{2m} - 1) - (9^m - 1) = q - p\,(9^m + 2).$$

Но p не кратно 3, откуда $r = 1$.

Докажем, что число p есть степень двойки только при $m = 1$. Действительно, пусть $m > 1$. Запишем $p = (3^m - 1)(3^m + 1)$. В правой части стоит произведение соседних четных чисел, бо́льших 4. Поэтому хотя бы одно из них не делится на 4 и, значит, не является степенью 2.

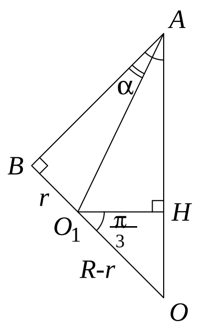
Если $m = 1$, мы получим $x = 9^3 - 1 = 728 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений нет. Одно из чисел p и q делится на 13. Рассмотрим два случая.

1) *p кратно 13.* Тогда $m \,\vdots\, 3$, то есть $m = 3k$. Если $k = 1$, то p делится на 7 и 13. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

2) *q кратно 13.* Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 13, то есть $q = 13^s$ при некотором натуральном s. Значит, остаток от деления q на 8 равен 5 при нечетном s и 1 при четном. С другой стороны, этот остаток должен быть таким же, как у $9^{2m} + 9^m + 1$, то есть 3, что невозможно. $\square$

6. *Три одинаковых конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом. Каждый из них касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A и углом при вершине $\frac{2\pi}{3}$. Найдите угол при вершине у одинаковых конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\,\mathrm{arcctg}\,\frac{4+\sqrt{3}}{3}$.



Решение. Обозначим искомый угол через 2α. Впишем в равные конусы шары с центрами O_1, O_2, O_3 одного радиуса r. Они, очевидно, касаются друг друга. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O радиуса R, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается шаров, вписанных в одинаковые конусы (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно. Тогда $OO_1 = OO_2 = OO_3 = R - r$. Кроме того, прямоугольные треугольники ABO_1, ACO_2 и ADO_3 равны по двум катетам, откуда $AO_1 = AO_2 = AO_3$. Значит, прямая AO проходит через центр

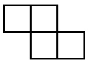
H описанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ перпендикулярно к его плоскости. Заметим, что этот треугольник правильный и $O_1O_2 = 2r$, откуда $O_1H = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. С другой строны,

$$O_1H = OO_1 \cdot \cos\angle OO_1H = (R-r)\cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}\,(R-r).$$

Поскольку $R = AB \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = r\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = r\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$, мы получаем

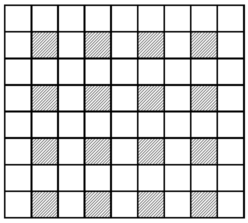
$$\tfrac{2r}{\sqrt{3}} = \tfrac{r}{2}\left(\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha - 1\right) \Longleftrightarrow \sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha = \tfrac{4}{\sqrt{3}} + 1 \Longleftrightarrow 2\alpha = 2\operatorname{arcctg}\tfrac{4+\sqrt{3}}{3}. \quad \square$$

Вариант 4

1. *При каком наименьшем k можно так отметить k клеток доски 8×9, что при любом размещении на доске четырехклеточной фигурки*  *она задевает хотя бы одну отмеченную клетку? (Фигурку можно поворачивать и переворачивать.)*

   Ответ: 16.

   Решение. Несложно заметить, что в любом прямоугольнике 2×4 есть хотя бы две отмеченные клетки. Поскольку из доски 8×9 можно вырезать 8 непересекающихся прямоугольников 2×4, в ней должно быть не менее 16 отмеченных клеток. Пример с 16 отмеченными клетками показан на рисунке. $\square$



2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^{12}+y^{12}\leqslant 2$. Докажите неравенство $x^2+y^2+x^2y^2\leqslant 3$.*

   Решение. Положим $u=x^2$, $v=y^2$. Необходимо доказать, что $u+v+uv\leqslant 3$. Заметим, что

$$(a+b)^3\leqslant 4\left(a^3+b^3\right)\quad \text{при всех}\ \ a,b\geqslant 0.$$

Действительно, при $a=b=0$ все очевидно. В противном случае после сокращения на $a+b$ мы получим $a^2+2ab+b^2\leqslant 4\left(a^2-ab+b^2\right)$, что эквивалентно $3\,(a-b)^2\geqslant 0$. При $a=u^2$ и $b=v^2$ доказанное неравенство дает

$$8\geqslant 4\left(u^6+v^6\right)\geqslant \left(u^2+v^2\right)^3,\quad \text{откуда}\ \ u^2+v^2\leqslant 2.$$

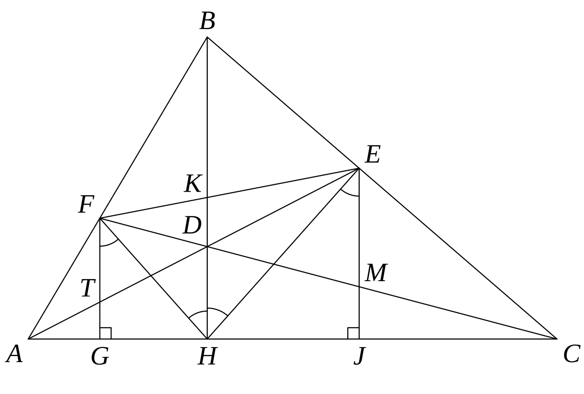
В силу неравенств Коши

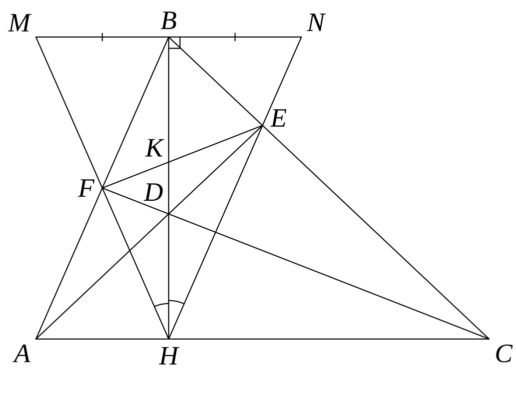
$$u+v\leqslant \sqrt{2}\cdot\sqrt{u^2+v^2}\leqslant 2,\quad uv\leqslant \tfrac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\leqslant 1,$$

то есть $u+v+uv\leqslant 3$. $\square$

3. *На высоте BH треугольника ABC отмечена некоторая точка D. Прямая AD пересекает сторону BC в точке E, прямая CD пересекает сторону AB в точке F. Известно, что BH делит отрезок FE в отношении $1:3$, считая от точки F. Найдите отношение $FH:HE$.*

   Ответ: $1:3$.





Решение 1. Пусть G и H — проекции на AC точек F и E соответственно, T — точка пересечения AE и FG, M — точка пересечения CF и EJ, K — точка пересечения BH и FE (см. левый рисунок). Так как треугольники FDT и MDE подобны, по теореме Фалеса

$$\frac{EM}{FT}=\frac{DE}{DT}=\frac{HJ}{GH}.$$

Треугольники AFT и ABD подобны с коэффициентом, равным отношению их высот. Поэтому

$$\frac{FT}{BD} = \frac{AG}{AH} = \frac{FG}{BH}, \quad \text{то есть} \ \frac{FG}{FT} = \frac{BH}{BD}.$$

Аналогичным образом получаем, что $\frac{EJ}{EM} = \frac{BH}{BD}$. Тогда

$$\frac{FG}{FT} = \frac{EJ}{EM}, \quad \text{откуда} \ \frac{EJ}{FG} = \frac{EM}{FT} = \frac{HJ}{GH}.$$

Значит, прямоугольные треугольники HEJ и HFG подобны. Поскольку

$$\angle KHF = \angle HFG = \angle HEJ = \angle KHE,$$

отрезок HK является биссектрисой треугольника EHF. Поэтому

$$FH : HE = FK : KE = 1 : 3. \quad \square$$

Решение 2. Обозначим через K точку пересечения BH и EF. Пусть прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает лучи HF и HE в точках M и N соответственно (см. правый рисунок). Из подобия треугольников AFH и BFM

$$\frac{BM}{AH} = \frac{BF}{AF}, \quad \text{откуда} \ BM = \frac{BF \cdot AH}{AF}.$$

Подобие треугольников CEH и BEN дает

$$\frac{BN}{CH} = \frac{BE}{CE}, \quad \text{то есть} \ BN = \frac{BE \cdot CH}{CE}.$$

В силу теоремы Чевы

$$1 = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CE}{BE} \cdot \frac{AH}{CH} = \frac{BF \cdot AH}{AF} \cdot \frac{CE}{BE \cdot CH} = \frac{BM}{BN}.$$

Тогда отрезок HB является медианой и высотой треугольника MHN, а значит, и его биссектисой. Поэтому HK — биссектриса треугольника EHF, откуда $FH : HE = FK : KE = 1 : 3$. $\square$

4. *На трибунах хоккейной арены несколько рядов по 168 мест в каждом ряду. На финальный матч в качестве зрителей пригласили 2016 учеников нескольких спортивных школ, не более 45 от каждой школы. Учеников любой школы требуется разместить на одном ряду. Какое наименьшее количество рядов должно быть на арене, чтобы это в любом случае удалось сделать?*

Ответ: 16.

Решение. Допустим, что 46 школ прислали на финальный матч по 43 ученика и одна школа — 34 ученика. Поскольку на одном ряду умещаются лишь три группы по 43 школьника, для размещения учеников 46 школ количество рядов должно быть не меньше $\frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$, то есть по крайней мере 16.

Покажем, что 16 рядов достаточно. Предположим, что на трибуне есть один большой ряд, разделенный проходами на сектора по 168 мест. Посадим на этот большой ряд, игнорируя проходы, сначала учеников первой школы, затем второй, и так далее. В результате будет полностью занято 12 секторов. При такой рассадке на двух секторах могут оказаться ученики не более 11 школ. Так как любые три школы помещаются на одном секторе, для рассадки этих оставшихся учеников достаточно четырех секторов. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 9^n - 1$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 7. Найдите x.*

Ответ: 728.

Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 7. Остатки от деления степеней 9 на 7 равны $2, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 7 означает, что n кратно 3, то есть $x = 9^{3m} - 1$. Отсюда

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 9^m - 1, \; q = 9^{2m} + 9^m + 1.$$

Заметим, что числа p и q взаимно просты. Действительно, если число r делит p и q, то оно делит и 3, так как

$$3 = q - (9^{2m} - 1) - (9^m - 1) = q - p\,(9^m + 2).$$

Но p не кратно 3, откуда $r = 1$.

Докажем, что число p есть степень двойки только при $m = 1$. Действительно, пусть $m > 1$. Запишем $p = (3^m - 1)(3^m + 1)$. В правой части стоит произведение соседних четных чисел, бо́льших 4. Поэтому хотя бы одно из них не делится на 4 и, значит, не является степенью 2.

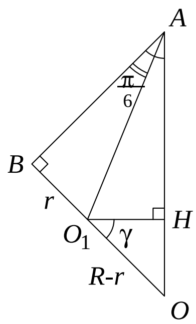
Если $m = 1$, мы получим $x = 9^3 - 1 = 728 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений нет. Одно из чисел p и q делится на 7. Рассмотрим два случая.

1) *p кратно 7.* Тогда $m \,\vdots\, 3$, то есть $m = 3k$. Если $k = 1$, то p делится на 7 и 13. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

2) *q кратно 7.* Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 7, то есть $q = 7^s$ при некотором натуральном s. Значит, остаток от деления q на 8 равен 7 при нечетном s и 1 при четном. С другой стороны, этот остаток должен быть таким же, как у $9^{2m} + 9^m + 1$, то есть 3, что невозможно. $\square$

6. *Три одинаковых конуса с вершиной A и углом при вершине $\frac{\pi}{3}$ касаются друг друга внешним образом. Каждый из них касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A. Найдите его угол при вершине. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Решение. Обозначим искомый угол через 2γ. Впишем в равные конусы шары с центрами O_1, O_2, O_3 одного радиуса r. Они, очевидно, касаются друг друга. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O радиуса R, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается шаров, вписанных в одинаковые конусы (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно. Тогда $OO_1 = OO_2 = OO_3 = R - r$. Кроме того, прямоугольные треугольники ABO_1, ACO_2 и ADO_3 равны по двум катетам, откуда $AO_1 = AO_2 = AO_3$. Значит, прямая AO проходит через центр H описанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ перпендикулярно к его плоскости. Заметим, что этот треугольник правильный и $O_1O_2 = 2r$, откуда $O_1H = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. С другой строны,

$$O_1H = OO_1 \cdot \cos\angle OO_1H = (R - r)\cos\gamma.$$

Поскольку $R = AB \cdot \operatorname{tg}\gamma = r \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\,\operatorname{tg}\gamma = r\sqrt{3}\operatorname{tg}\gamma$, мы получаем

$$\frac{2r}{\sqrt{3}} = r\left(\sqrt{3}\sin\gamma - \cos\gamma\right) \iff \frac{1}{\sqrt{3}} = \sin\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right) \iff 2\gamma = \frac{\pi}{3} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \square$$

Вариант 5

1. *В клетках таблицы* 10×10 *расставлены числа* $1, 2, 3, \ldots, 100$ *так, что сумма чисел, расположенных в любом квадратике* 2×2, *не превосходит* S. *Найдите наименьшее возможное значение* S.

Ответ: 202.

Решение. Разобьем таблицу 10×10 на 25 квадратов 2×2. Поскольку сумма чисел во всей таблице равна

$$1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050,$$

среднее арифметическое сумм чисел в этих 25 квадратах равно 202. Значит, хотя бы в одном квадрате сумма чисел не меньше 202, то есть $S \geqslant 202$. Пример расстановки, при которой реализуется значение $S = 202$, приведен на рисунке. $\square$

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

2. *Даны числа* a, b, c, d, e, f, *причем* $b^2 \leqslant ac$. *Докажите неравенство*

$$(af - cd)^2 \geqslant (ae - bd)(bf - ce).$$

Решение. Если $a = 0$ или $c = 0$, то $b = 0$, и неравенство очевидно. Пусть a и c отличны от нуля. Правая часть неравенства есть квадратный трехчлен от e

$$\varphi(e) = -ace^2 + eb(af + cd) - b^2 df$$

с отрицательным старшим коэффициентом. Максимум φ реализуется при $e = \dfrac{b(af + dc)}{2ac}$ и равен

$$b^2 \left(\frac{af + cd}{2c} - d \right) \left(f - \frac{af + cd}{2a} \right) = \frac{b^2}{4ac} (af - cd)^2,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство. $\square$

3. *Дан остроугольный треугольник* ABC *с углом* $\angle ABC = \alpha$. *На продолжении стороны* BC *взята такая точка* D, *что прямая* AD — *касательная к описанной окружности* ω *треугольника* ABC. *Прямая* AC *пересекает описанную окружность треугольника* ABD *в точке* E. *Оказалось, что биссектриса* $\angle ADE$ *касается окружности* ω. *В каком отношении точка* C *делит отрезок* AE?

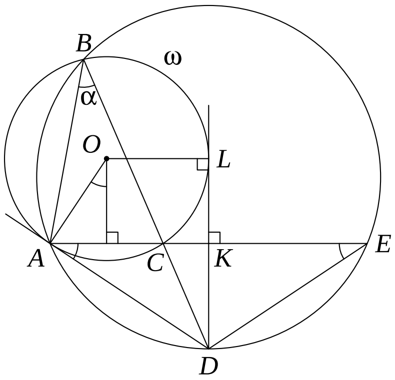
Ответ: $AC : CE = \sin\alpha$.

Решение. Пусть r — радиус ω, K и L — точки пересечения биссектрисы угла ADE с AE и ω соответственно (см. рисунок). Угол между касательной AD к окружности ω и хордой AC равен вписанному углу, который опирается на AC, откуда $\angle DAE = \angle ABD$. Кроме того, вписанные углы ABD и AED опираются на хорду AD и потому равны. Тогда $\angle DAE = \angle AED$, то есть треугольник ADE — равнобедренный.

Поэтому $AK = KE$ и $DK \perp AE$. Отрезок AE параллелен радиусу OL окружности ω, поскольку они оба перпендикулярны DL. Тогда $AC = 2r \sin\alpha$ и

$$CE = AE - AC = 2AK - AC = 2\left(r + r\sin\alpha\right) - 2r\sin\alpha = 2r,$$

что и дает ответ. $\square$



4. *В школе 920 учеников, причем в каждом классе их не более k человек. Все школьники должны поехать на автобусную экскурсию. Для этого заказано 16 автобусов по 71 месту в каждом. Школьников нужно рассадить по автобусам так, чтобы ученики каждого класса оказались в одном автобусе. При каком наибольшем k это гарантированно можно сделать?*

   Ответ: 17.

   Решение. Если $k = 18$, то рассадить школьников по автобусам можно не всегда. Действительно, пусть в школе имеется 50 классов по 18 учеников и два по 10 учеников. В один автобус умещается лишь три класса по 18 школьников. Поэтому для перевозки учеников таких классов потребуется не менее 17 автобусов.

   Покажем, что если в каждом классе не более 17 учеников, то разместить школьников по автобусам всегда удастся. Пронумеруем места в автобусах сквозным образом: в первом — с 1 по 71, во втором — с 72 по 142, и так далее. Посадим в порядке возрастания номеров мест сначала всех учеников первого класса, затем — второго, и так далее. В результате школьники поместятся в 13 автобусов, поскольку $13 \cdot 71 = 923 > 920$. При такой рассадке в двух автобусах могут оказаться ученики не более 12 классов. Для размещения этих классов достаточно трех автобусов, поскольку в одном автобусе помещаются любые четыре класса. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 5^n - 1$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 11. Найдите x.*

   Ответ: 3124.

   Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 11. Остатки от деления степеней 5 на 11 равны $5, 3, 4, 9, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 11 означает, что n кратно 5, то есть $x = 5^{5m} - 1$. Отсюда по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 5^m - 1, \ \ q = 1 + 5^m + 5^{2m} + 5^{3m} + 5^{4m}.$$

Заметим, что числа p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (5^m - 1) - (5^{2m} - 1) - (5^{3m} - 1) - (5^{4m} - 1).$$

Разности вида $5^{km} - 1$ делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но p не кратно 5, откуда $r = 1$.

Докажем, что число p есть степень двойки только при $m = 1$. Действительно, пусть $m > 1$. Если $m = 2k$, то запишем $p = (5^k - 1)(5^k + 1)$. В правой части стоит произведение соседних четных чисел. Хотя бы одно из них больше 4 и не делится на 4, поэтому оно не является степенью 2. Пусть теперь $m = 2k+1$. Тогда

$$p = 5^m - 5 + 4 = 5 \cdot (5^k - 1)(5^k + 1) + 4.$$

Правая часть не делится на 8, поскольку $(5^k - 1)(5^k + 1)$ кратно 8 как произведение соседних четных чисел. Так как $p > 4$, число p не может быть степенью двойки.

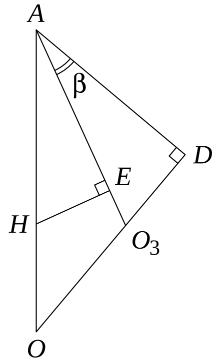
При $m = 1$ мы получим $x = 3124 = 4 \cdot 11 \cdot 71$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений не будет. Одно из чисел p и q делится на 11. Рассмотрим два случая.

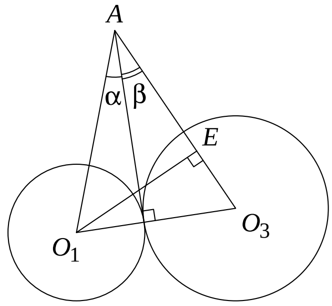
1) *p кратно 11.* Тогда $m \vdots 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 11 и 71. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

2) *q кратно 11.* Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 11. Остаток от деления 5^m на 8 равен 5 при нечетном m и 1 при четном m. Если m нечетно, то остаток от деления q на 8 такой же, как у $1+5+1+5+1 = 13$, то есть он равен 5. При четном m остаток от деления q на 8 также равен 5. Но остатки от деления 11^s на 8 принимают только значения 3 и 1, поэтому q не может быть степенью 11. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем у первых двух угол при вершине равен $\frac{\pi}{6}$. Каждый из конусов касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A и углом при вершине $\frac{\pi}{3}$. Найдите угол при вершине третьего конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

   Ответ: $2\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}+4\right)$.





Решение 1. Пусть 2β — искомый угол, $\alpha = \frac{\pi}{12}$. Впишем в первые три конуса шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Касательные, проведенные из A ко всем шарам, одинаковы, поскольку любая пара шаров имеет общую касательную. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается остальных шаров (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно. Заметим, что AO — ось симметрии четвертого конуса, и, значит, угол между AO и любой образующей этого конуса равен углу при вершине двух одинаковых конусов. Тогда AO касается этих конусов, то есть проходит через точку H касания шаров с центрами в O_1 и O_2. Отрезки AH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Поэтому отрезок O_1H перпендикулярен плоскости ADO_3 и, в частности, прямой AO_3. Значит, H и O_1 при проектировании на прямую AO_3 переходят в одну и ту же точку E. Тогда

$$AH \cdot \cos(2\alpha - \beta) = AH \cdot \cos \angle HAE = AE = AO_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{AB}{\cos \alpha} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Заметим, что $AH = AB$ как касательные к шару с центром в O_1. Поэтому

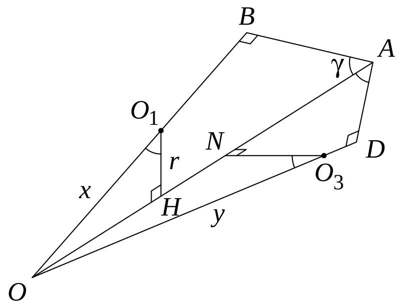
$$\cos 2\alpha \cos \beta + \sin 2\alpha \sin \beta = \cos \beta - \operatorname{tg} \alpha \sin \beta \iff \cos \beta \,(1 - \cos 2\alpha) = \sin \beta \,(\operatorname{tg} \alpha + \sin 2\alpha).$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\alpha + \sin 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \frac{2+\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha},$$

мы получаем

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin 2\alpha\,(2+\cos 2\alpha)}{1-\cos^2 2\alpha} = \frac{2+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 4+\sqrt{3} \Longleftrightarrow 2\beta = 2\operatorname{arcctg}\bigl(\sqrt{3}+4\bigr). \quad \square$$



Решение 2. Пусть 2β — искомый угол, $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Впишем в первые три конуса шары с центрами O_1, O_2, O_3 и радиусами r, r, ρ, касающиеся друг друга. Касательные, проведенные из A ко всем шарам, одинаковы, поскольку любая пара шаров имеет общую касательную. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O радиуса R, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается остальных шаров (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно. Заметим, что AO — ось симметрии четвертого конуса, и, значит, угол между AO и любой образующей этого конуса равен углу при вершине двух одинаковых конусов. Тогда AO касается этих конусов, то есть проходит через точку H касания шаров с центрами в O_1 и O_2. Отрезки AH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Поэтому отрезок O_1H перпендикулярен плоскости ADO_3 и, в частности, прямой HO_3. Пусть N — проекция точки O_3 на прямую AO, $x = R - r$, $y = R - \rho$. Тогда

$$r = O_1H = x\cos\gamma, \quad NO_3 = y\cos\gamma, \quad HN = |x-y|\sin\gamma.$$

По теореме Пифагора

$$O_1O_3^2 = O_1H^2 + HO_3^2 = O_1H^2 + NO_3^2 + HN^2 = \bigl(x^2+y^2\bigr)\cos^2\gamma + (x-y)^2\sin^2\gamma =$$
$$= \bigl(x^2+y^2-(x-y)^2\bigr)\cos^2\gamma + (x-y)^2 = 2xy\cos^2\gamma + (x-y)^2 = 2ry\cos\gamma + (\rho-r)^2.$$

С другой стороны, $O_1O_3 = \rho + r$, откуда

$$2ry\cos\gamma = (\rho+r)^2 - (\rho-r)^2 = 4\rho r \quad \text{и} \quad 2\rho = y\cos\gamma = (R-\rho)\cos\gamma.$$

Заметим, что $\rho = AD\cdot\operatorname{tg}\beta$, $R = AD\cdot\operatorname{tg}\gamma$. Поэтому

$$2\operatorname{tg}\beta = \sin\gamma - \operatorname{tg}\beta\cos\gamma \Longrightarrow \operatorname{ctg}\beta = \frac{2+\cos\gamma}{\sin\gamma} = 4+\sqrt{3}. \quad \square$$

Вариант 6

1. *В черных клетках шахматной доски 8×8 расставлены числа $1, 2, 3, \ldots, 32$ так, что сумма чисел, расположенных в любом квадратике 2×2, не превосходит S. Найдите наименьшее возможное значение S.*

Ответ: 33.

Решение. Разобьем шахматную доску на 16 квадратов 2×2. Поскольку сумма чисел, расположенных во всех черных клетках, равна

$$1 + 2 + \cdots + 32 = \frac{32 \cdot 33}{2} = 16 \cdot 33,$$

среднее арифметическое сумм чисел в этих 16 квадратах равно 33. Значит, хотя бы в одном квадрате сумма чисел не меньше 33, то есть $S \geqslant 33$. Пример расстановки, при которой реализуется значение $S = 33$, приведен на рисунке.

32		31		30		29	
	1		2		3		4
28		27		26		25	
	5		6		7		8
24		23		22		21	
	9		10		11		12
20		19		18		17	
	13		14		15		16

2. *Даны числа a, b, c, d, e, f, причем $b^2 \geqslant a^2 + c^2$. Докажите неравенство*

$$(af - cd)^2 \leqslant (ae - bd)^2 + (bf - ce)^2.$$

Решение. Если $a = c = 0$, то неравенство очевидно. В противном случае правая часть неравенства есть квадратный трехчлен от e

$$\varphi(e) = \left(a^2 + c^2\right)e^2 - 2eb(ad + cf) + b^2\left(d^2 + f^2\right)$$

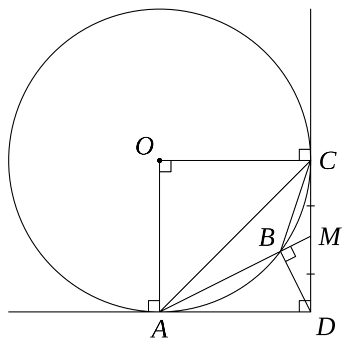
с положительным старшим коэффициентом. Минимум φ равен

$$-\frac{D}{4(a^2 + c^2)} = \frac{b^2}{a^2 + c^2}\left(\left(d^2 + f^2\right) - (ad + cf)^2\right) = \frac{b^2}{a^2 + c^2}\,(af - cd)^2,$$

где D — дискриминант φ. Отсюда и вытекает требуемое неравенство. $\square$

3. *Треугольник ABC с углом $\angle ABC = 135^\circ$ вписан в окружность ω. Прямые, касающиеся ω в точках A и C, пересекаются в точке D. Найдите $\angle ABD$, если известно, что AB делит отрезок CD пополам.*

Ответ: 90°.



Решение. Пусть O — центр ω, M — точка пересечения прямых AB и CD. Заметим, что

$$\angle AOC = 2\,(180^\circ - \angle ABC) = 2\,(180^\circ - 135^\circ) = 90^\circ.$$

Тогда четырехугольник $AOCD$ является квадратом и, значит, $\angle ADC = 90^\circ$. По теореме о касательной и секущей

$$DM^2 = MC^2 = BM \cdot AM, \quad \text{то есть } \frac{DM}{AM} = \frac{BM}{DM}.$$

Поэтому треугольники DBM и ADM подобны, откуда

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle MBD = 180^\circ - \angle ADM = 90^\circ. \quad \square$$

4. *На складе хранится 1500 тонн различных товаров в контейнерах. Вес любого контейнера кратен тонне и не превосходит k тонн. К складу подан состав из 25 платформ, грузоподъемность которых по 80 тонн. При каком максимальном k этим составом можно гарантированно вывезти весь товар?*

   Ответ: 26.

   Решение. Если $k = 27$, то вывезти весь товар можно не всегда. Действительно, пусть на складе имеется 55 контейнеров по 27 тонн и один весом 15 тонн. На одну платформу умещается лишь два контейнера по 27 тонн. Поэтому для перевозки 55 таких контейнеров потребуется не менее 28 платформ.

   Покажем, что если вес каждого контейнера не более 26 тонн, то вывезти их со склада всегда удастся. Представим себе, что в контейнерах хранятся ящики весом по тонне каждый, а сами контейнеры невесомые. Будем последовательно загружать ящиками платформы: как только очередная платформа заполнена — переходим к следующей. Грузить будем сначала все ящики из первого контейнера, затем из второго, и так далее. В результате ящики поместятся на 19 платформах, поскольку $19 \cdot 80 = 1520 > 1500$. При таком размещении на двух платформах могут оказаться ящики из не более чем 18 контейнеров. Для размещения этих контейнеров достаточно 6 платформ, поскольку на одной платформе помещаются любые три контейнера. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 8^n - 1$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 31. Найдите x.*

   Ответ: 32 767.

   Решение. Один из простых делителей x, очевидно, равен 7. Докажем вначале, что число вида $y = 8^k - 1$ является степенью 7 только в случае $k = 1$. Действительно, при $k > 1$ запишем $y = ab$, где $a = 2^k - 1$, $b = 2^{2k} + 2^k + 1$. Поскольку

$$b = 2^{2k} - 1 + 2^k - 1 + 3 = a\,(2^k + 2) + 3,$$

числа a и b не могут одновременно делиться на 7, и y не будет степенью 7.

Остатки от деления степеней 8 на 31 равны $8, 2, 16, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 31 означает, что n кратно 5, то есть $x = 8^{5m} - 1$. Заметим также, что m не делится на 4, иначе делителями x будут еще 3, 5 и 7. При $m = 1$ мы получим $x = 32\,767 = 7 \cdot 31 \cdot 151$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений не будет. По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 8^m - 1, \;\; q = 1 + 8^m + 8^{2m} + 8^{3m} + 8^{4m}.$$

Докажем, что числа p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (8^m - 1) - (8^{2m} - 1) - (8^{3m} - 1) - (8^{4m} - 1).$$

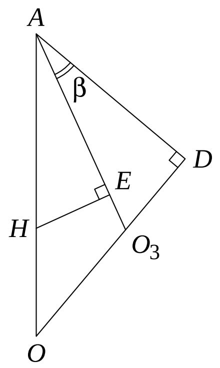
Разности вида $8^{km} - 1$ делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но остатки от деления 8^m на 5 равны $3, 4, 2, 1$ и далее циклически повторяются. Так как m не кратно 4, число p не делится на 5, откуда $r = 1$. Значит, q не делится на 7, поскольку $p \,\vdots\, 7$. Рассмотрим два случая.

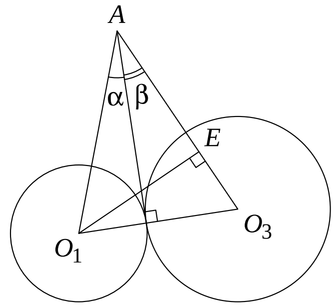
1) *p кратно 31.* Тогда $m \,\vdots\, 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 31 и 151. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится в произведение двух взаимно простых чисел, не являющихся степенями 7. С учетом делимости x на 7 мы получим, что x имеет не менее четырех различных простых делителей.

2) *q кратно 31.* Заметим, что p делится на 7, не являясь степенью 7, а q взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 31, то есть $q = 31^s$. Переходя к остаткам от деления на 8, мы получим $1 = (-1)^s$, откуда s четно. Кроме того, остатки от деления 31^s на 7 при четных s равны $2, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Но остаток от деления q на 7 равен 5. Таким образом, q не может быть степенью 31. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем первые два из них одинаковы, а у третьего угол при вершине равен $2\arcsin\frac{1}{4}$. Каждый из конусов касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A. Найдите угол при вершине у первых двух конусов, если он вдвое меньше, чем у четвертого конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{1}{4}$.





Решение. Пусть 2α — искомый угол, $\beta = \arcsin\frac{1}{4}$. Впишем в первые три конуса шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Касательные, проведенные из A ко всем шарам, одинаковы, поскольку любая пара шаров имеет общую касательную. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается остальных шаров (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно. Заметим, что AO — ось симметрии четвертого конуса, и, значит, угол между AO и любой образующей этого конуса равен углу при вершине двух одинаковых конусов. Тогда AO касается этих конусов, то есть проходит через точку H касания шаров с центрами в O_1 и O_2. Отрезки AH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Поэтому отрезок O_1H перпендикулярен плоскости ADO_3 и, в частности, прямой AO_3. Значит, H и O_1 при проектировании на прямую AO_3 переходят в одну и ту же точку E. Тогда

$$AH \cdot \cos(2\alpha - \beta) = AH \cdot \cos\angle HAE = AE = AO_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{AB}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Заметим, что $AH = AB$ как касательные к шару с центром в O_1. Поэтому

$$\cos 2\alpha \cos\beta + \sin 2\alpha \sin\beta = \cos\beta - \operatorname{tg}\alpha \sin\beta \Longleftrightarrow \cos\beta\,(1 - \cos 2\alpha) = \sin\beta\,(\operatorname{tg}\alpha + \sin 2\alpha).$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\alpha + \sin 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \frac{2 + \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha},$$

мы получаем

$$\cos\beta\,(1 - \cos^2 2\alpha) = \sin\beta \sin 2\alpha\,(2 + \cos 2\alpha) \Longleftrightarrow \cos\beta \sin 2\alpha = \sin\beta\,(2 + \cos 2\alpha) \Longleftrightarrow$$

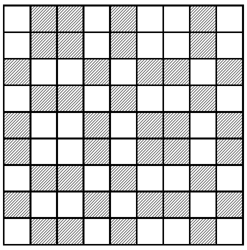
$$\Longleftrightarrow \sin(2\alpha - \beta) = 2\sin\beta \Longleftrightarrow 2\alpha = \arcsin(2\sin\beta) + \beta = \tfrac{\pi}{6} + \arcsin\tfrac{1}{4}. \quad \square$$

Вариант 7

1. *Петя с Васей играют в следующую игру. Петя отмечает k клеток доски 9×9, после чего Вася кладет на доску прямоугольник 1×4 и сообщает Пете, какие из отмеченных клеток он накрыл (прямоугольник можно поворачивать). Вася выигрывает, если Петя не может однозначно определить положение прямоугольника. При каком наименьшем k Петя может так отметить клетки, что Васе не удастся выиграть?*

Ответ: 40.

Решение. Покажем, что необходимо отметить не менее 40 клеток. Рассмотрим 5 клеток, идущих подряд: $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{D}\boxed{E}$. Петя должен отметить хотя бы одну из клеток A и E. Действительно, если Петя не отметил клетки A и E, то он не сможет различить размещения прямоугольника на клетках $ABCD$ и на клетках $BCDE$. Значит, из любых клеток, идущих через три (как по горизонтали, так и по вертикали), хотя бы одна отмечена. Полоска 1×8 разбивается на четыре пары таких клеток, поэтому в ней не менее четырех отмеченных клеток. Заметим, что из доски 9×9 можно вырезать 10 непересекающихся полосок 1×8 (9 горизонтальных и одну вертикальную). Значит, должно быть отмечено не менее 40 клеток. Пример с 40 отмеченными клетками показан на рисунке. $\square$



2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^4 + y^4 \geqslant 2$. Докажите неравенство $\left|x^{12} - y^{12}\right| + 2x^6y^6 \geqslant 2$.*

Решение 1. Заметим, что

$$(u+v)^3 \leqslant 4\left(u^3+v^3\right) \quad \text{при всех } \ u, v \geqslant 0.$$

Действительно, при $u = v = 0$ все очевидно. В противном случае после сокращения на $u + v$ мы получим $u^2 + 2uv + v^2 \leqslant 4\,(u^2 - uv + v^2)$, что эквивалентно $3\,(u-v)^2 \geqslant 0$.

В силу симметрии неравенства мы можем считать, что $|x| \geqslant |y|$. Тогда $x^6y^6 \geqslant y^{12}$, откуда

$$x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6 \geqslant x^{12} + y^{12} \geqslant \frac{(x^4+y^4)^3}{4} \geqslant 2. \quad \square$$

Решение 2. В силу симметрии и четности левой части неравенства мы можем считать, что $x \geqslant y \geqslant 0$. Положим

$$x = r\sqrt[6]{\cos t},\ y = r\sqrt[6]{\sin t}, \quad \text{где } r \geqslant 0,\ t \in \left[0, \tfrac{\pi}{4}\right].$$

Заметим, что в силу вогнутости функции $t \mapsto \sqrt[3]{t}$

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \leqslant 2\sqrt[3]{\tfrac{a+b}{2}} = \sqrt[3]{4(a+b)} \quad \text{для любых } \ a, b \geqslant 0.$$

Применяя это неравенство для $a = \cos^2 t$ и $b = \sin^2 t$, мы получим

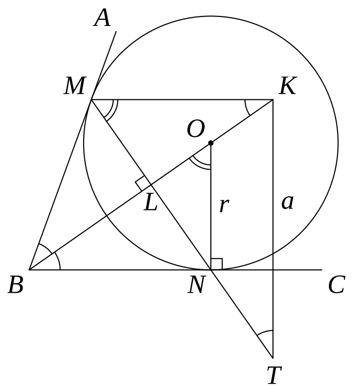
$$2 \leqslant x^4 + y^4 = r^4\left(\sqrt[3]{\cos^2 t} + \sqrt[3]{\sin^2 t}\right) \leqslant r^4\sqrt[3]{4\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} = r^4 \cdot 2^{\frac{2}{3}},$$

откуда $r^4 \geqslant \sqrt[3]{2}$ и $r^{12} \geqslant 2$. Поэтому при $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$x^{12} - y^{12} + 2x^6y^6 = r^{12}\left(\cos^2 t - \sin^2 t + 2\sin t\cos t\right) =$$
$$= r^{12}\left(\cos 2t + \sin 2t\right) = r^{12}\sqrt{2}\sin\left(2t + \tfrac{\pi}{4}\right) \geqslant r^{12} \geqslant 2. \quad \square$$

3. *Окружность с центром O радиуса r касается сторон BA и BC острого угла ABC в точках M и N соответственно. Прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает луч BO в точке K. На луче MN выбрана точка T так, что $\angle MTK = \frac{1}{2}\angle ABC$. Найдите длину отрезка BO, если $KT = a$.*

Ответ: $\sqrt{r(a+r)}$.



Решение. Пусть L — точка пересечения MN с лучом BO. Заметим, что треугольник MBN равнобедренный, а BL — биссектриса его угла B. Значит, BL будет также высотой и медианой треугольника MBN. Тогда $\angle KLM = 90°$, а прямоугольные треугольники KLM и BLN равны, откуда $MK = BN$. Кроме того,

$$\angle MKL = \angle LBC = \tfrac{1}{2}\angle ABC = \angle MTK.$$

Таким образом, треугольники MKT и MLK подобны по двум углам. Поэтому $\angle MKT = 90°$, и треугольник MKT подобен также ONB. Тогда

$$\frac{KT}{MK} = \frac{BN}{ON} \iff \frac{a}{BN} = \frac{BN}{r} \iff BN^2 = ar.$$

По теореме Пифагора

$$BO = \sqrt{BN^2 + ON^2} = \sqrt{ar + r^2} = \sqrt{r(a+r)}. \quad \square$$

4. *В театре k рядов кресел. 770 зрителей пришли в театр и расселись по местам (заняв, возможно, не все кресла). После антракта все зрители забыли, на каких местах они располагались, и сели по-другому. При каком наибольшем k заведомо найдется 4 зрителя, которые и до, и после антракта сидели на одном ряду?*

Ответ: 16.

Решение. Если зрители расселись на 16 рядов, то на каком-то ряду оказалось не менее 49 зрителей (в противном случае на каждом ряду не более 48 зрителей, а всего их тогда не более $16 \cdot 48 = 768 < 770$). Так как $\frac{49}{16} > 3$, нельзя рассадить зрителей этого ряда после антракта так, чтобы в каждом ряду их оказалось не более трех. Таким образом, $k = 16$ нас устраивает.

Покажем теперь, что при наличии 17 рядов зрителей можно рассадить так, чтобы нужных четырех зрителей не нашлось. Назовем *n-й колонкой* места в зале с номером n, циклически упорядоченные по рядам:

$$1, 2, \ldots, 17, 1, 2, \ldots, 17, \ldots. \qquad (*)$$

Пусть *циклический сдвиг* колонки на m рядов — перестановка колонки, при которой новый номер ряда каждого зрителя получается из старого сдвигом на m позиций вправо в последовательности $(*)$. Заполним зрителями колонки с номерами от 1 по 45, а также первые 5 мест 46-й колонки. Таким образом, в зале окажется $17 \cdot 45 + 5 = 770$ человек. После антракта мы рассадим зрителей следующим образом. Зрители колонок 1, 2, 3 садятся на свои места; в колонках 4, 5, 6 зрители циклически сдвигаются на один ряд, в колонках 7, 8, 9 — на два ряда, и так далее. В результате мы получим ситуацию, когда нет четырех зрителей, сидевших на одном ряду и до, и после антракта. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 9^n - 1$, где n — натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 11. Найдите x.*

Ответ: 59 048.

Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 11. Докажем вначале, что число $3^s + 1$ не может быть степенью двойки при $s > 1$, а число $3^s - 1$ — при $s > 2$. Действительно, при $s > 1$ число $3^s + 1$ больше 8 и не делится на 8, так как его остаток от деления на 8 равен 4 или 2. Пусть теперь $s > 2$. Если s нечетно, число $3^s - 1$ больше 8 и не делится на 8, так как его остаток от деления на 8 равен 2. Если $s = 2k$, то $3^s - 1$ делится на число $3^k + 1$, которое не является степенью двойки. Из доказанного, в частности, вытекает, что $9^s - 1$ будет степенью двойки только при $s = 1$.

Остатки от деления степеней 9 на 11 равны $9, 4, 3, 5, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 11 означает, что n кратно 5, то есть $x = 9^{5m} - 1$. Если $m = 1$, мы получим $x = 9^5 - 1 = 59\,048 = 2^3 \cdot 11^2 \cdot 61$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений нет. Рассмотрим два случая.

1) *m нечетно.* По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 9^m - 1, \ \ q = 1 + 9^m + 9^{2m} + 9^{3m} + 9^{4m}.$$

Докажем, что числа p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (9^m - 1) - (9^{2m} - 1) - (9^{3m} - 1) - (9^{4m} - 1).$$

Разности вида $9^{km} - 1$ делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но p не кратно 5 при нечетном m, откуда $r = 1$.

Пусть p кратно 11. Тогда $m \,\vdots\, 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 11 и 61. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

Пусть теперь q кратно 11. Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 11, то есть $q = 11^s$. Но остаток от деления 11^s на 8 равен 3 при нечетном s и 1 при четном, а остаток от деления q на 8 равен 5. Поэтому число q не может быть степенью 11.

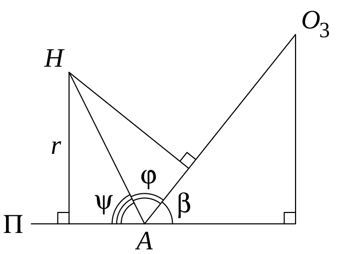
2) *m четно.* Тогда $n = 2k$ при $k \geqslant 5$, и

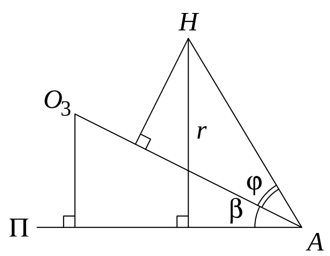
$$x = (9^k - 1)(9^k + 1) = (3^k - 1)(3^k + 1)(9^k + 1).$$

Множители в правой части взаимно просты, поскольку пары чисел $3^k \pm 1$ и $9^k \pm 1$ нечетны и отличаются на 2. Кроме того, ни один из множителей не является степенью двойки. Действительно, для первых двух мы это уже доказали, а $9^k + 1$ больше 8 и дает при делении на 8 остаток 2. Таким образом, x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем первые два из них одинаковы, а у третьего угол при вершине равен $\frac{\pi}{2}$. Все конусы касаются также одной плоскости, проходящей через точку A, и лежат по одну сторону от нее. Найдите угол при вершине у первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2 \operatorname{arctg} \frac{4}{5}$.





Решение. Пусть 2α — искомый угол, $\beta = \frac{\pi}{4}$, Π — плоскость, которой касаются конусы. Впишем в конусы шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Обозначим через r радиус первых двух шаров, а через H — точку их касания. Так как оба шара касаются плоскости Π, расстояние от O_1 и O_2 до Π равно r. Тогда $O_1O_2 \parallel \Pi$, поэтому расстояние от H до Π также равно r. Пусть $\varphi = \angle HAO_3$, ψ — угол между лучом AH и плоскостью Π. Отрезки AH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Тогда отрезок O_1H перпендикулярен плоскости HAO_3 и, в частности, прямой AO_3. Значит, проекции отрезков AH и AO_1 на прямую AO_3 равны, откуда

$$AH \cdot \cos\varphi = AO_1 \cdot \cos(\alpha+\beta) = \frac{AH}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha+\beta).$$

Заметим также, что $\sin\psi = \frac{r}{AH} = \operatorname{tg}\alpha$. Рассмотрим два случая.

1) $\varphi = \pi - \beta - \psi$ (см. левый рисунок). Тогда

$$\cos(\pi-\beta-\psi) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} \Longleftrightarrow \sin\beta\sin\psi - \cos\beta\cos\psi = \cos\beta - \sin\beta\operatorname{tg}\alpha \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \cos\beta\,(1+\cos\psi) = 2\sin\beta\sin\psi \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\tfrac{\psi}{2} = \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\beta = \tfrac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\psi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}} = \tfrac{4}{5}.$$

2) $\varphi = \psi - \beta$ (см. правый рисунок). Тогда

$$\cos(\psi-\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} \Longleftrightarrow \cos\beta\cos\psi + \sin\beta\sin\psi = \cos\beta - \sin\beta\operatorname{tg}\alpha \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \cos\beta\,(1-\cos\psi) = 2\sin\beta\sin\psi \Longleftrightarrow \operatorname{ctg}\tfrac{\psi}{2} = \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\beta = \tfrac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\psi = \frac{2\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\psi}{2}} = \tfrac{4}{5}.$$

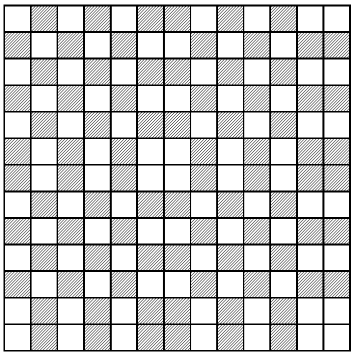
Таким образом, в обоих случаях мы получаем $2\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{4}{5}$. $\square$

Вариант 8

1. *Петя с Васей играют в следующую игру. Петя отмечает k клеток доски 13×13, после чего Вася кладет на доску прямоугольник 1×6 и сообщает Пете, какие из отмеченных клеток он накрыл (прямоугольник можно поворачивать). Вася выигрывает, если Петя не может однозначно определить положение прямоугольника. При каком наименьшем k Петя может так отметить клетки, что Васе не удастся выиграть?*

Ответ: 84.

Решение. Покажем, что необходимо отметить не менее 84 клеток. Рассмотрим 7 клеток, идущих подряд: $\boxed{A|B|C|D|E|F|G}$. Петя должен отметить хотя бы одну из клеток A и G. Действительно, если Петя не отметил клетки A и G, то он не сможет различить размещения прямоугольника на клетках $ABCDEF$ и на клетках $BCDEFG$. Значит, из любых клеток, идущих через пять (как по горизонтали, так и по вертикали), хотя бы одна отмечена. Полоска 1×12 разбивается на шесть пар таких клеток, поэтому в ней не менее шести отмеченных клеток. Заметим, что из доски 13×13 можно вырезать 14 непересекающихся полосок 1×12 (13 горизонтальных и одну вертикальную). Значит, должно быть отмечено не менее $14 \cdot 6 = 84$ клеток. Пример с 84 отмеченными клетками показан на рисунке. $\square$



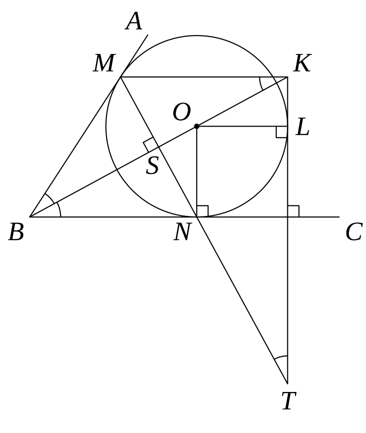
2. *Даны числа x, y, удовлетворяющие условию $x^4 + y^4 \geqslant 2$. Докажите неравенство $\left|x^{16} - y^{16}\right| + 4x^8y^8 \geqslant 4$.*

Решение. Заметим, что $u^2 + v^2 \geqslant \frac{1}{2}(u+v)^2$ при любых $u, v \geqslant 0$, поскольку это неравенство эквивалентно $(u-v)^2 \geqslant 0$. В силу симметрии неравенства мы можем считать, что $|x| \geqslant |y|$. Тогда $x^8y^8 \geqslant y^{16}$, откуда

$$x^{16} - y^{16} + 4x^8y^8 \geqslant x^{16} + 2x^8y^8 + y^{16} = \left(x^8 + y^8\right)^2 \geqslant \frac{\left(x^4 + y^4\right)^4}{4} \geqslant 4. \quad \square$$

3. *Окружность ω с центром O касается сторон BA и BC острого угла ABC в точках M и N соответственно. Прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает луч BO в точке K. На луче MN выбрана точка T так, что $\angle MTK = \frac{1}{2}\angle ABC$. Оказалось, что прямая KT касается ω. Найдите площадь треугольника OKT, если $BM = a$.*

Ответ: $\dfrac{a^2}{2}$.



Решение. Пусть L — точка касания KT с ω, S — точка пересечения MN с лучом BO. Заметим, что треугольник MBN равнобедренный, а BS — биссектриса его угла B. Значит, BS будет также высотой и медианой треугольника MBN, то есть $MS = SN$ и $\angle KSM = 90^\circ$. Прямоугольные треугольники BSN и KSM равны по катету и углу, откуда $MK = BN = a$. Кроме того,

$$\angle MKS = \angle SBC = \tfrac{1}{2}\angle ABC = \angle MTK.$$

Таким образом, треугольники MKT и MSK подобны по двум углам. Поэтому $\angle MKT = 90^\circ$, и треугольник MKT подобен также ONB. Тогда

$$\frac{KT}{a} = \frac{KT}{BM} = \frac{KT}{BN} = \frac{MK}{ON} = \frac{a}{OL}\,,$$

и площадь треугольника OTK равна $\dfrac{KT\cdot OL}{2} = \dfrac{a^2}{2}$. $\square$

4. *У библиофила Васи 1300 книг, расставленных в шкафах на k книжных полках. Однажды Вася переставил шкафы на новое место, предварительно вынув из них все книги. При этом он совершенно забыл, как книги стояли раньше, и расставил их в шкафах в другом порядке. При каком наибольшем k заведомо найдется 5 книг, которые и до, и после перестановки стояли на одной полке?*

   Ответ: 18.

Решение. Если у Васи 18 полок, то на какой-то полке стоит не менее 73 книг (в противном случае на каждой полке не более 72 книг, а всего их тогда не более $18\cdot 72 = 1296 < 1300$). Так как $\frac{73}{18} > 4$, нельзя расставить книги с этой полки так, чтобы на каждой полке оказалось не более четырех книг. Таким образом, $k = 18$ нас устраивает.

Покажем теперь, что при наличии 19 полок книги можно переставить так, чтобы нужных пяти книг не нашлось. Назовем *n-м рядом* книги, стоящие на полках на n-м месте слева, циклически упорядоченные по полкам:

$$1, 2, \ldots, 19, 1, 2, \ldots, 19, \ldots. \tag{$*$}$$

Пусть *циклический сдвиг* ряда на m полок — перестановка книг, при которой новый номер полки для каждой книги получается из старого сдвигом на m позиций вправо в последовательности $(*)$. Заполним книгами ряды с номерами от 1 по 68, а также первые 8 полок 69-го ряда. Таким образом, на полках окажется $19\cdot 68 + 8 = 1300$ книг. После перестановки шкафов мы расставим книги следующим образом. Книги из рядов 1, 2, 3 и 4 поставим на свои места; в рядах 5, 6, 7 и 8 книги циклически сдвинем на одну полку, в рядах 9, 10, 11 и 12 — на две полки, и так далее. В результате мы получим ситуацию, когда нет пяти книг, стоявших на одной полке и до, и после перестановки. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 9^n - 1$, где n — нечетное натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 61. Найдите x.*

   Ответ: 59 048.

Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 61. Остатки от деления степеней 9 на 61 равны $9, 20, 58, 34, 1$ и далее циклически повторяются. Тогда делимость x на 61 означает, что n кратно 5, то есть $x = 9^{5m} - 1$, где m нечетно. По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p\cdot q, \quad \text{где } p = 9^m - 1, \ \ q = 1 + 9^m + 9^{2m} + 9^{3m} + 9^{4m}.$$

Докажем, что числа p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (9^m - 1) - (9^{2m} - 1) - (9^{3m} - 1) - (9^{4m} - 1).$$

Разности вида $9^{km} - 1$ делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но p не кратно 5 при нечетном m, откуда $r = 1$.

Докажем, что число p есть степень двойки в точности при $m = 1$. Действительно, для $m > 1$ запишем $p = (3^m - 1)(3^m + 1)$. В правой части стоит произведение соседних четных чисел, бо́льших 2. Поэтому хотя бы одно из них не делится на 4 и, значит, не является степенью 2.

Если $m = 1$, мы получим $x = 9^5 - 1 = 59\,048 = 2^3 \cdot 11^2 \cdot 61$, что нам подходит. Покажем, что при $m > 1$ решений нет. Рассмотрим два случая.

1) *p кратно 61.* Тогда $m \,\vdots\, 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 11 и 61. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

2) *q кратно 61.* Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 61, то есть $q = 61^s$. Заметим, что $s \,\vdots\, 3$, так как $q - 1$ кратно 9, а остатки от деления 61^s на 9 равны $7, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Кроме того, при делении на 8 число q дает остаток 5, а остаток 61^s равен 5 при нечетном s и 1 при четном. Значит, s нечетно, откуда s имеет вид $6k + 3$ при некотором натуральном k.

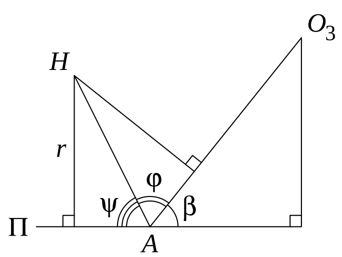
Сравним теперь остатки q и 61^s от деления на 7. Остатки 61^s равны $5, 4, 6, 2, 3, 1$ и далее циклически повторяются. Для $s = 6k + 3$ все они совпадают с 6. Остатки 9^m равны $2, 4, 1$ и далее циклически повторяются. Поэтому нам достаточно найти остатки q при $m = 1, 2, 3$. Они равны

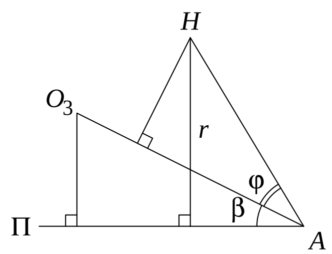
$$\begin{aligned}
(1+2+4+1+2) \mod 7 = 3, &\quad \text{если } m = 1,\\
(1+4+1+2+4) \mod 7 = 5, &\quad \text{если } m = 2,\\
(1+1+2+4+1) \mod 7 = 2, &\quad \text{если } m = 3.
\end{aligned}$$

Поскольку ни одно из этих чисел не совпадает с 6, q не может быть степенью 61. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем у первых двух из них угол при вершине равен $\frac{\pi}{3}$. Все конусы касаются также одной плоскости, проходящей через точку A, и лежат по одну сторону от нее. Найдите угол при вершине у третьего конуса. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2 \operatorname{arcctg} 2\left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)$.





Решение. Пусть 2β — искомый угол, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, П — плоскость, которой касаются конусы. Впишем в конусы шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Обозначим через r радиус первых двух шаров, а через H — точку их касания. Так как оба шара касаются плоскости П, расстояние от O_1 и O_2 до П равно r. Тогда $O_1O_2 \parallel$ П, поэтому расстояние от H до П также равно r. Пусть $\varphi = \angle HAO_3$, ψ — угол между лучом AH и плоскостью П. Отрезки AH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A и $O_1O_2O_3$. Тогда отрезок O_1H перпендикулярен плоскости HAO_3 и, в частности, прямой AO_3. Значит, проекции отрезков AH и AO_1 на прямую AO_3 равны, откуда

$$AH \cdot \cos\varphi = AO_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{AH}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Заметим также, что

$$\sin\psi = \frac{r}{AH} = \operatorname{tg}\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\psi = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Рассмотрим два случая.

1) $\varphi = \pi - \beta - \psi$ (см. левый рисунок). Тогда

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha} = \cos(\pi - \beta - \psi) \iff \cos\beta - \sin\beta\sin\psi = \cos\beta - \sin\beta\operatorname{tg}\alpha = \sin\beta\sin\psi - \cos\beta\cos\psi,$$

откуда
$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{2\sin\psi}{1+\cos\psi}=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=2\bigl(\sqrt{3}-\sqrt{2}\bigr)\quad \text{и}\quad 2\beta=2\operatorname{arcctg}2\bigl(\sqrt{3}-\sqrt{2}\bigr).$$

2) $\varphi=\psi-\beta$ (см. правый рисунок). Тогда
$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}=\cos(\psi-\beta)\Longleftrightarrow\cos\beta-\sin\beta\sin\psi=\cos\beta-\sin\beta\operatorname{tg}\alpha=\cos\beta\cos\psi+\sin\beta\sin\psi,$$
откуда
$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{2\sin\psi}{1-\cos\psi}=\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=2\bigl(\sqrt{3}+\sqrt{2}\bigr)\quad \text{и}\quad 2\beta=2\operatorname{arcctg}2\bigl(\sqrt{3}+\sqrt{2}\bigr).\quad\square$$

Вариант 9

1. *Петя с Васей играют в следующую игру. Петя отмечает k клеток доски 9×9, после чего Вася кладет на доску уголок из трех клеток и сообщает Пете, какие из отмеченных клеток он накрыл. Вася выигрывает, если Петя не может однозначно определить положение уголка. При каком наименьшем k Петя может так отметить клетки, что Васе не удастся выиграть?*

Ответ: 68.

Решение. Отметим вначале несколько простых фактов.

1) *В любом прямоугольнике 2×3 неотмеченных клеток не более одной.* Это проверяется прямым перебором.

2) *В любом квадрате 3×3 неотмеченных клеток не более двух и, если их две, то они расположены в противоположных углах квадрата.* В противном случае найдутся две неотмеченные клетки, попадающие в один прямоугольник 2×3.

3) *Любой прямоугольник 3×6 (вертикальный или горизонтальный) содержит не более трех неотмеченных клеток.* Действительно, разобьем прямоугольник на два квадрата 3×3 и накроем их общую сторону прямоугольником 2×3. В силу 1) в нем может быть лишь одна неотмеченная клетка. Тогда в одном из квадратов две смежные угловые клетки отмечены. В силу 2) в этом квадрате есть не более одной неотмеченной клетки, а в другом их не более двух.

Разобъем доску на 9 квадратов 3×3. В силу 3) по две неотмеченные клетки могут содержать не более чем пять из них. Если таких квадратов 4, то общее число неотмеченных клеток не превосходит $4 \cdot 2 + 5 = 13$. Если же их пять, то согласно 3) они идут в шахматном порядке. Поэтому неотмеченные клетки могут располагаться лишь так, как показано на рисунке (с точностью до поворота доски).

*						*		
		*						*
					*			
			*					
*						*		
		*						*

Но тогда в остальных квадратах все клетки должны быть отмечены, поскольку любая из них может быть накрыта прямоугольником 2×3 вместе с какой-то из неотмеченных клеток. Значит, в этом случае может быть не более 10 неотмеченных клеток. Пример с 13 неотмеченными (то есть с 68 отмеченными) клетками показан на рисунке. $\square$

*				*				*
		*				*		
*				*				*
		*				*		
*				*				*

2. *Даны положительные числа a, b, c, d, e, f, причем $\left|\sqrt{ab} - \sqrt{cd}\right| \leqslant 2$. Докажите неравенство*

$$\left(\frac{e}{a} + \frac{b}{e}\right)\left(\frac{e}{c} + \frac{d}{e}\right) \geqslant \left(\frac{f}{a} - b\right)\left(d - \frac{f}{c}\right).$$

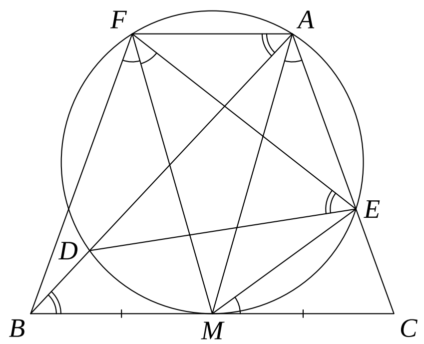
Решение. Обозначим левую часть неравенства через $\varphi(e)$, а правую — через $\psi(f)$. В силу неравенства Коши

$$\varphi(e) = \frac{d}{a} + \frac{b}{c} + \frac{e^2}{ac} + \frac{bd}{e^2} \geqslant \frac{d}{a} + \frac{b}{c} + 2\sqrt{\frac{bd}{ac}} = \left(\sqrt{\frac{d}{a}} + \sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2.$$

Заметим, что
$$\psi(f) = -\frac{f^2}{ac} + f\left(\frac{d}{a} + \frac{b}{c}\right) - bd,$$
то есть правая часть неравенства есть квадратный трехчлен относительно f с дискриминантом
$$\left(\frac{d}{a} + \frac{b}{c}\right)^2 - 4 \cdot \frac{bc}{ad} = \left(\frac{d}{a} - \frac{b}{c}\right)^2.$$
Тогда при любых $e, f > 0$
$$\psi(f) \leqslant \frac{ac}{4}\left(\frac{d}{a} - \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{ac}{4}\left(\sqrt{\frac{d}{a}} - \sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2\left(\sqrt{\frac{d}{a}} + \sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\sqrt{cd} - \sqrt{ab}}{2}\right)^2 \cdot \varphi(e) \leqslant \varphi(e). \quad \square$$

3. *В треугольнике ABC проведена медиана AM. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. На дуге AD, не содержащей точку E, выбрали такую точку F, что $\angle BFE = 72°$. Оказалось, что $\angle DEF = \angle ABC$. Найдите угол $\angle CME$.*

   Ответ: $36°$.



Решение. Вписанные углы DAF и DEF опираются на дугу DF и потому равны. В силу условия $\angle FAB = \angle ABC$, откуда $BC \parallel AF$. Тогда прямая ℓ, проходящая через точку M перпендикулярно касательной BC, содержит диаметр окружности ω и перпендикулярна ее хорде AF. Значит, точки A и F симметричны относительно ℓ, то есть ℓ является осью симметрии трапеции $BCAF$. Отсюда вытекает, что $AC = BF$ и $AM = FM$. Следовательно, треугольники BFM и CAM равны по трем сторонам, поэтому $\angle BFM = \angle EAM$. Кроме того, $\angle EFM = \angle EAM$ как вписанные углы, опирающиеся на одну хорду. Тогда FM — биссектриса угла BFE, и
$$\angle EAM = \angle EFM = \tfrac{1}{2}\angle BFE = 36°.$$
Заметим теперь, что угол между хордой EM и касательной BC равен вписанному углу, опирающемуся на EM. Поэтому $\angle CME = \angle EAM = 36°$. $\square$

4. *В коробке лежит вперемешку большая партия цветов шести видов. Вася случайным образом берет цветки по одному из коробки. Как только набирается 5 цветов одного вида, Вася составляет из них букет и продает его. Какое наименьшее количество цветов ему надо взять, чтобы гарантированно продать 10 букетов?*

   Ответ: 70.

Решение. Заметим, что 69 цветков не хватит. Действительно, если Вася вытащил 49 цветков первого вида и по 4 цветка каждого из остальных видов, то он в общей сложности взял $49 + 5 \cdot 4 = 69$ цветков, но из них можно собрать лишь 9 букетов.

Пусть Вася вытащил 70-й цветок и, возможно, продал один букет. Из оставшихся цветов составить букет уже нельзя. Поэтому у Васи на руках оказалось не более четырех цветков каждого вида, а всего не более 24 цветов. Так как и 70, и количество проданных цветов кратны 5, остаться могло не более 20 цветов. Значит, Вася продал как минимум 50 цветков, то есть 10 букетов. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 7^n + 1$, где n — нечетное натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 11. Найдите x.*

Ответ: 16808.

Решение. Поскольку число x четно, один из его простых делителей равен 2. Поэтому мы должны найти все x, имеющие ровно два нечетных простых делителя, один из которых равен 11. Делимость x на 11 равносильна тому, что n — нечетное кратное 5, то есть $x = 7^{5m} + 1$ при некотором нечетном m. Отсюда по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 7^m + 1, \ q = 1 - 7^m + 7^{2m} - 7^{3m} + 7^{4m}.$$

Заметим, что p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (7^m + 1) - (7^{2m} - 1) - (7^{3m} + 1) - (7^{4m} - 1).$$

Выражения, стоящие в скобках в правой части, делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но остатки от деления степеней 7 на 5 равны $2, 4, 3, 1$ и далее циклически повторяются. Значит, p не кратно 5 при нечетных m, откуда $r = 1$.

Докажем, что число p есть степень двойки только при $m = 1$. Действительно, пусть $m > 1$ и $7^m+1 = 2^s$. Тогда $s \geqslant 4$ и число $7^m + 1$ кратно 16. Но это невозможно, поскольку остатки от деления 7^m на 16 принимают только значения 7 и 1.

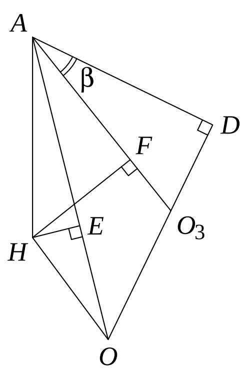
Если $m = 1$, мы получим $x = 16808 = 2^3 \cdot 11 \cdot 191$, что нам подходит. Покажем, что при $m \geqslant 3$ решений не будет. Рассмотрим два случая.

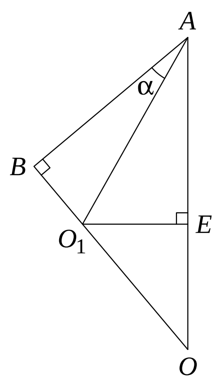
1) *p кратно 11.* Тогда $m \,\vdots\, 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 11 и 191. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p разложится на два взаимно простых множителя, не являющихся степенями двойки. Поэтому x имеет не менее трех различных простых нечетных делителей, что невозможно.

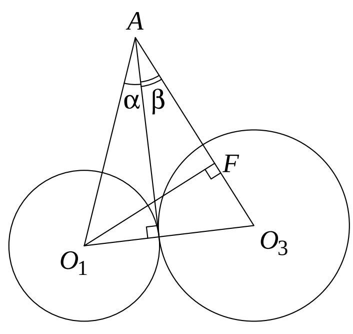
2) *q кратно 11.* Заметим, что p имеет нечетный делитель, а q нечетно и взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 11. Остаток от деления 7^m на 8 равен -1 ввиду нечетности m. Поэтому число q дает при делении на 8 остаток 5. Но остатки от деления 11^s на 8 принимают только значения 3 и 1, поэтому q не может быть степенью 11. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем первые два из них одинаковы, а у третьего угол при вершине равен $\frac{\pi}{3}$. Каждый из конусов касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A и углом при вершине $\frac{5\pi}{6}$. Найдите угол при вершине у первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2 \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 1)$.







Решение. Пусть 2α — искомый угол, $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\gamma = \frac{5\pi}{12}$. Впишем в первые три конуса шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Касательные, проведенные из A ко всем шарам, имеют одинаковую длину, поскольку любая пара шаров имеет общую касательную. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается остальных шаров (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно, причем $OO_1 = OO_2$. Пусть H — точка касания шаров с центрами O_1 и O_2, $\varphi = \angle HAD$. Отрезки AH, OH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A, O_1O_2O и $O_1O_2O_3$. Поэтому точки A, O, O_3, D лежат в плоскости, проходящей через точку H перпендикулярно O_1H. В частности, $AO \perp O_1H$ и $AO_3 \perp O_1H$. Значит, точки H и O_1 имеют одинаковые проекции как на прямую AO, так и на прямую AO_3 (обозначим эти проекции через E и F соответственно). Отсюда

$$AH \cdot \cos(\varphi - \gamma) = AH \cdot \cos\angle HAE = AE = AO_1 \cdot \cos\angle O_1AE = AO_1 \cdot \cos(\gamma - \alpha) = \frac{AB}{\cos\alpha} \cdot \cos(\gamma - \alpha),$$
$$AH \cdot \cos(\varphi - \beta) = AH \cdot \cos\angle HAF = AF = AO_1 \cdot \cos\angle O_1AF = AO_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{AB}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Заметим, что $AH = AB$ как касательные к шару с центром в O_1. Поэтому

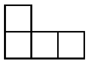
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma = \cos\gamma + \operatorname{tg}\alpha\sin\gamma, \\ \cos\varphi\cos\beta + \sin\varphi\sin\beta = \cos\beta - \operatorname{tg}\alpha\sin\beta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\gamma\,(\cos\varphi - 1) + \sin\varphi, \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta\,(1 - \cos\varphi) - \sin\varphi. \end{array} \right.$$

Исключая из системы $\operatorname{tg}\alpha$, мы получим $2\sin\varphi = (1 - \cos\varphi)(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)$, откуда

$$\operatorname{ctg}\tfrac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{1 + \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\frac{5\pi}{6}}\right) = 1.$$

Тогда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, и из второго уравнения системы $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta - 1 = \sqrt{3} - 1$. $\square$

Вариант 10

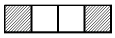
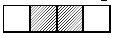
1. *Петя с Васей играют в следующую игру. Петя отмечает k клеток доски 8×8, после чего Вася кладет на доску четырехклеточную фигурку*  *и сообщает Пете, какие из отмеченных клеток он накрыл (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Вася выигрывает, если Петя не может однозначно определить положение фигурки. При каком наименьшем k Петя может так отметить клетки, что Васе не удастся выиграть?*

   Ответ: 48.

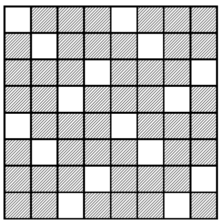
   Решение. Покажем, что отмечено не менее 48 клеток. Проверим вначале следующее утверждение: *среди любых двух клеток, идущих через одну по горизонтали, вертикали или диагонали, хотя бы одна отмечена.* Действительно, рассмотрим квадрат 3×3:

A		
B		F
C	D	E

Если Петя не отметил клетки B и F, то он не сможет различить размещения фигурки на клетках $BCDE$ и $CDEF$. Если же Петя не отметил клетки A и E, то он не сможет различить размещения фигурки на клетках $ABCD$ и $BCDE$.

Покажем теперь, что в любом квадрате 4×4 не может быть более четырех неотмеченных клеток. Ясно, что никакая строка квадрата не содержит более двух неотмеченных клеток. Возьмем две строки квадрата, номера которых различаются на 2. Если в одной из строк есть две неотмеченные клетки, то они расположены одним из двух способов:  или . Тогда из доказанного утверждения вытекает, что в другой строке все клетки должны быть отмечены. Значит, в выбраной паре строк не более двух неотмеченных клеток, и в оставшейся паре тоже.

Поскольку доска 8×8 разрезается на четыре квадрата 4×4, в ней может быть не более 16 неотмеченных клеток. Таким образом, отмечено должно быть не менее 48 клеток. Пример с 48 отмеченными клетками показан на рисунке. $\square$



2. *Даны положительные числа a, b, c, d, e, f, причем $\left|\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right| \leqslant 1$. Докажите неравенство*

$$\left(ae + \frac{b}{e}\right)\left(ce + \frac{d}{e}\right) \geqslant \left(a^2 f^2 - \frac{b^2}{f^2}\right)\left(\frac{d^2}{f^2} - c^2 f^2\right).$$

Решение. Обозначим левую часть неравенства через $\varphi(e)$, а правую — через $\psi(f)$. В силу неравенства Коши

$$\varphi(e) = ad + bc + ace^2 + \frac{bd}{e^2} \geqslant ad + bc + 2\sqrt{acbd} = \left(\sqrt{ad} + \sqrt{bc}\right)^2,$$

а также

$$\psi(f) = a^2 d^2 + b^2 c^2 - \left(a^2 c^2 f^4 + \frac{b^2 d^2}{f^4}\right) \leqslant a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2acbd = (ad - bc)^2.$$

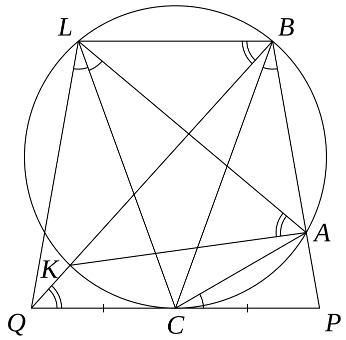
Тогда при любых $e, f > 0$

$$\psi(f) \leqslant \left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \left(\sqrt{ad} + \sqrt{bc}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{ad} + \sqrt{bc}\right)^2 \leqslant \varphi(e). \quad \square$$

3. *Вокруг треугольника ABC описана окружность ω. Прямая, касающаяся ω в точке C, пересекает луч BA в точке P. На луче PC за точкой C отметили такую точку Q, что $PC = QC$. Отрезок*

BQ вторично пересекает окружность ω в точке K. На меньшей дуге BK окружности ω отметили такую точку L, что $\angle LAK = \angle CQB$. Найдите угол $\angle PCA$, если известно, что $\angle ALQ = 60°$.

Ответ: $30°$.



Решение. Вписанные углы LAK и LBK опираются на дугу LK и потому равны. В силу условия $\angle LBQ = \angle BQC$, откуда $BL \parallel PQ$. Тогда прямая ℓ, проходящая через точку C перпендикулярно касательной PQ, содержит диаметр окружности ω и перпендикулярна ее хорде BL. Значит, точки B и L симметричны относительно ℓ, то есть ℓ является осью симметрии трапеции $PQLB$. Отсюда вытекает, что $BP = LQ$ и $BC = LC$. Следовательно, треугольники QLC и PBC равны по трем сторонам, поэтому $\angle QLC = \angle ABC$. Кроме того, $\angle ALC = \angle ABC$ как вписанные углы, опирающиеся на одну хорду. Тогда LC — биссектриса угла ALQ, и

$$\angle ABC = \angle ALC = \tfrac{1}{2}\angle ALQ = 30°.$$

Заметим теперь, что угол между хордой AC и касательной CP равен вписанному углу, опирающемуся на AC. Поэтому $\angle PCA = \angle ABC = 30°$. $\square$

4. *Какое наибольшее количество вершин правильного 2016-угольника можно отметить так, что никакие четыре отмеченные вершины не являются вершинами какого-либо прямоугольника?*

Ответ: 1009.

Решение. Заметим, что вписанный четырехугольник является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали — диаметры описанной окружности. У 2016-угольника есть ровно 1008 пар диаметрально противоположных вершин. Если из отмеченных вершин нельзя составить прямоугольник, то только в одной паре могут быть отмечены обе вершины. Значит, всего отмечено не более $1007+2 = 1009$ вершин.

С другой стороны, занумеруем вершины 2016-угольника по порядку от 1 до 2016 и отметим первые 1009 вершин. Диаметрально противоположными будут лишь вершины с номерами 1 и 1009. Поэтому 1009 удовлетворяет условию задачи. $\square$

5. *Дано натуральное число $x = 6^n + 1$, где n — нечетное натуральное число. Известно, что x имеет ровно три различных простых делителя, один из которых равен 11. Найдите x.*

Ответ: 7777.

Решение. Делимость x на 11 равносильна тому, что n — нечетное кратное 5, то есть $x = 6^{5m} + 1$ при некотором нечетном m. Отсюда по формуле для суммы геометрической прогрессии

$$x = p \cdot q, \quad \text{где } p = 6^m + 1, \ \ q = 1 - 6^m + 6^{2m} - 6^{3m} + 6^{4m}.$$

Заметим, что p и q взаимно просты. Действительно, пусть число r делит p и q. Тогда

$$5 = q - (6^m + 1) - (6^{2m} - 1) - (6^{3m} + 1) - (6^{4m} - 1).$$

Выражения, стоящие в скобках в правой части, делятся на p и, тем более, на r. Поэтому r является делителем 5. Но остаток от деления p на 5 при любом m равен 2. Значит, p не кратно 5, откуда $r = 1$.

Поскольку число m нечетно, один из простых делителей p равен 7. Докажем, что число p есть степень 7 только при $m = 1$. Пусть $m \geqslant 3$ и $6^m + 1 = 7^s$. Тогда число $7^s - 1$ делится на 2^m и, тем более, на 8. Отсюда вытекает, что s четно, то есть $s = 2k$. Поэтому $2^m \cdot 3^m = (7^k - 1)(7^k + 1)$. Так как $7^k + 1$ не кратно 3, число $7^k - 1$ делится на 3^m и, значит, $7^k - 1 \geqslant 3^m$. Но тогда

$$7^k + 1 \leqslant 2^m < 3^m \leqslant 7^k - 1,$$

что невозможно.

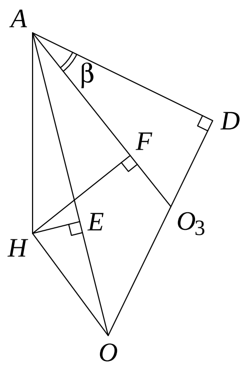
Если $m = 1$, мы получим $x = 7777 = 7 \cdot 11 \cdot 101$, что нам подходит. Покажем, что при $m \geqslant 3$ решений не будет. Рассмотрим два случая.

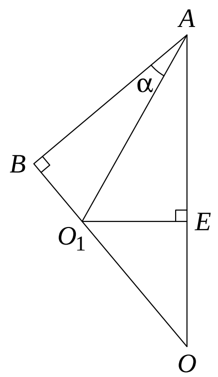
1) *p кратно 11.* Тогда $m \,\vdots\, 5$, то есть $m = 5k$. Если $k = 1$, то p делится на 7, 11 и 101. При $k > 1$ мы можем применить к p те же рассуждения, что к x. В обоих случаях p есть произведение 7 и двух взаимно простых множителей, не являющихся степенями 7. Поэтому x имеет не менее четырех различных простых делителей, что невозможно.

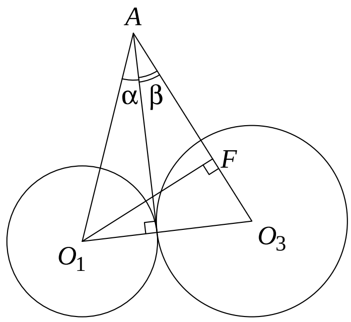
2) *q кратно 11.* Заметим, что p кратно 7 и не является степенью 7, а q взаимно просто с p. Тогда q должно быть степенью 11. Остаток от деления 6^m на 7 равен -1 ввиду нечетности m. Поэтому число q дает при делении на 8 остаток 5. Но остатки от деления 11^s на 7 принимают только значения 4, 2 и 1, поэтому q не может быть степенью 11. $\square$

6. *Три конуса с вершиной A касаются друг друга внешним образом, причем первые два из них одинаковы, а у третьего угол при вершине равен $\frac{\pi}{4}$. Каждый из конусов касается внутренним образом четвертого конуса с вершиной в точке A и углом при вершине $\frac{3\pi}{4}$. Найдите угол при вершине у первых двух конусов. (Углом при вершине конуса называется угол между его образующими в осевом сечении.)*

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.







Решение. Пусть 2α — искомый угол, $\beta = \frac{\pi}{8}$, $\gamma = \frac{3\pi}{8}$. Впишем в первые три конуса шары с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся друг друга. Касательные, проведенные из A ко всем шарам, имеют одинаковую длину, поскольку любая пара шаров имеет общую касательную. Пусть четвертый конус касается этих шаров в точках B, C, D. Тогда $AB = AC = AD$ и, значит, эти точки лежат на некотором шаре с центром O, вписанном в четвертый конус. Этот шар касается остальных шаров (так как, например, шары с центрами в O и O_1 касаются в точке B плоскости, содержащей образующую AB и касающейся четвертого конуса). Поэтому точки O_1, O_2, O_3 лежат на отрезках OB, OC, OD соответственно, причем $OO_1 = OO_2$. Пусть H — точка касания шаров с центрами O_1 и O_2, $\varphi = \angle HAD$. Отрезки AH, OH и O_3H перпендикулярны O_1H как медианы равнобедренных треугольников O_1O_2A, O_1O_2O и $O_1O_2O_3$. Поэтому точки A, O, O_3, D лежат в плоскости, проходящей через точку H перпендикулярно O_1H. В частности, $AO \perp O_1H$ и $AO_3 \perp O_1H$. Значит, точки H и O_1 имеют одинаковые проекции как на прямую AO, так и на прямую AO_3 (обозначим эти проекции через E и F соответственно). Отсюда

$$AH \cdot \cos(\varphi - \gamma) = AH \cdot \cos\angle HAE = AE = AO_1 \cdot \cos\angle O_1AE = AO_1 \cdot \cos(\gamma - \alpha) = \frac{AB}{\cos\alpha} \cdot \cos(\gamma - \alpha),$$

$$AH \cdot \cos(\varphi - \beta) = AH \cdot \cos\angle HAF = AF = AO_1 \cdot \cos\angle O_1AF = AO_1 \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{AB}{\cos\alpha} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Заметим, что $AH = AB$ как касательные к шару с центром в O_1. Поэтому

$$\begin{cases} \cos\varphi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma = \cos\gamma + \operatorname{tg}\alpha\sin\gamma, \\ \cos\varphi\cos\beta + \sin\varphi\sin\beta = \cos\beta - \operatorname{tg}\alpha\sin\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\gamma\,(\cos\varphi - 1) + \sin\varphi, \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta\,(1 - \cos\varphi) - \sin\varphi. \end{cases}$$

Исключая из системы $\operatorname{tg}\alpha$, мы получим $2\sin\varphi = (1-\cos\varphi)(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\varphi)$, откуда

$$\operatorname{ctg}\tfrac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \tfrac{1}{2}\,(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = \sqrt{2},$$

поскольку

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}+1, \quad \operatorname{ctg}\gamma = \frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}-1.$$

Теперь из второго уравнения системы

$$\operatorname{tg}\alpha = (1-\cos\varphi)\big(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\tfrac{\varphi}{2}\big) = \frac{2\big(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\big)}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\big(\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\big)}{3} = \frac{2}{3} \Longrightarrow 2\alpha = 2\operatorname{arctg}\tfrac{2}{3}. \quad \square$$