Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Задания заключительного этапа

2014/2015 учебный год

Задания для 10-11 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

Олимпиада школьников СПбГУ по математике.
Заключительный тур. 2014/2015 учебный год.

Вариант 1

1. *В теннисном турнире участвуют $2^n + 4$ школьников, где n — натуральное число, бо́льшее 4. За победу дается 1 очко, за поражение — 0 очков. Перед каждым туром пары по жребию составляют из участников, имеющих равное количество очков (те, кому не нашлось пары, пропускают тур). Турнир заканчивается, как только определяется единоличный лидер. Сколько школьников наберут после окончания турнира по 3 очка?*

Ответ: $C_n^3 + 1$.

Решение. Докажем вначале два утверждения.

1) *В турнире с 2^n участниками спортсменов без пары никогда не будет, и по итогам турнира для любого $k \in \{0, \ldots, n\}$ по k очков будут иметь C_n^k школьников.* Воспользуемся индукцией по n. Для $n = 1$ все очевидно. Пусть для некоторого n оба утверждения верны. Тогда в турнире с 2^{n+1} участниками после первого тура по 2^n школьников наберут 0 очков и 1 очко. Будем в дальнейшем проводить жеребьевку так, чтобы участники из этих групп встречались только друг с другом. По индукционному предположению это всегда можно сделать, и на распределение баллов такое допущение, очевидно, не повлияет. Иными словами, далее мы проводим два независимых турнира с 2^n участниками. По индукционному предположению участников без пары в этих турнирах не будет. Кроме того, в первом турнире по k очков наберут C_n^k школьников, а во втором — C_n^{k-1} школьников, поскольку на старте все участники имели по очку. В итоге по k очков наберут $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ школьников (мы воспользовались основным тождеством треугольника Паскаля). Таким образом, индукционный переход завершен.

2) *Турнир можно свести двум независимым турнирам в группах из 2^n и 4 человек.* Действительно, будем в каждом туре сводить только спортсменов из одной группы. В силу 1) в первой группе всех участников можно разбить на пары. Поэтому при отсутствии у кого-то пары в общем турнире мы можем считать, что этот участник — из второй группы. В конце турнира результаты двух групп просто объединяются.

Вычислим общее количество участников, набравших в турнире по 3 очка. В силу 1) в первой группе их будет C_n^3. Динамика распределения очков среди участников из второй группы такова:

$$4 \to (2, 2) \to (1, 2, 1) \to (1, 1, 2) \to (1, 1, 1, 1).$$

(левая цифра означает число аутсайдеров, правая — число лидеров). После четвертого тура школьникам из второй группы играть не с кем, поэтому и в конце турнира 3 очка будет иметь один спортсмен. Таким образом, ответом является сумма C_n^3 и 1. $\square$

2. *Найдите наименьшее значение при $a, b > 0$ выражения*

$$\frac{|6a - 4b| + \left|3(a + b\sqrt{3}\,) + 2(a\sqrt{3} - b)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ответ: $\sqrt{39}$.

Решение 1. Минимизируемое выражение равно $2(d_1 + d_2)$, где d_1, d_2 — расстояния от точки $A(3, 2)$ до прямых ℓ_1, ℓ_2, задаваемых уравнениями

$$\ell_1 : \ ax - by = 0 \quad \text{и} \quad \ell_2 : \ (a + b\sqrt{3}\,)x + (a\sqrt{3} - b)y = 0.$$

Эти прямые пересекаются в начале координат O. Найдем угол φ между ними:

$$\cos\varphi = \frac{a(a + b\sqrt{3}\,) - b(a\sqrt{3} - b)}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\left(a + b\sqrt{3}\,\right)^2 + \left(a\sqrt{3} - b\right)^2}} = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{4a^2 + 4b^2}} = \frac{1}{2},$$

то есть $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Будем не умаляя общности считать, что точка A лежит внутри острого угла, образуемого прямыми ℓ_1 и ℓ_2 (иначе можно совместить прямые ℓ_1 и AB, уменьшив d_1 и d_2). Пусть α — угол между ℓ_1 и AB. Тогда $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ и

$$2(d_1 + d_2) = 2 \cdot OA \cdot \left(\sin\alpha + \sin\left(\tfrac{\pi}{3} - \alpha\right)\right) = 4\sqrt{13}\,\sin\tfrac{\pi}{6}\cos\left(\tfrac{\pi}{6} - \alpha\right) = 2\sqrt{13}\,\cos\left(\tfrac{\pi}{6} - \alpha\right).$$

Минимум правой части достигается при $\alpha = 0$, то есть в случае $A \in \ell_1$, и он равен $\sqrt{39}$. $\square$

Решение 2. Обозначим минимизируемое выражение через A. Пусть $a = r\cos t$, $b = r\sin t$, где $r > 0$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$\begin{aligned} A &= |6\cos t - 4\sin t| + \left|3(\cos t + \sqrt{3}\sin t) + 2(\sqrt{3}\cos t - \sin t)\right| = \\ &= |6\cos t - 4\sin t| + \left|6\cos\left(t - \tfrac{\pi}{3}\right) - 4\sin\left(t - \tfrac{\pi}{3}\right)\right| = 2\sqrt{13}\left(|\sin(t-\alpha)| + |\sin(t - \tfrac{\pi}{3} - \alpha)|\right), \end{aligned}$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. Заметим, что $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, поскольку $\frac{3}{2} < \sqrt{3}$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $t \leqslant \alpha$. Тогда

$$A = 2\sqrt{13}\left(\sin(\alpha - t) + \sin\left(\tfrac{\pi}{3} + \alpha - t\right)\right) = 4\sqrt{13}\,\cos\tfrac{\pi}{6}\sin(\alpha + \tfrac{\pi}{6} - t).$$

Так как $\alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$, минимум A в этом случае достигается при $t = \alpha$ и равен $\sqrt{39}$.

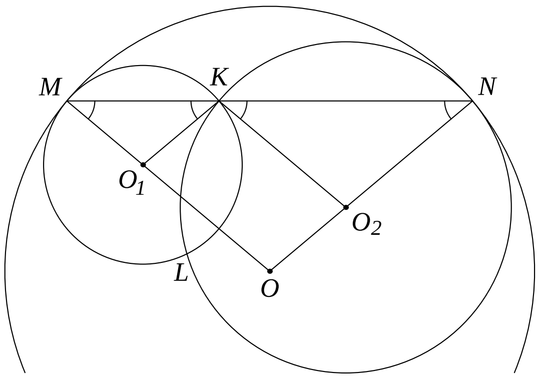
2) Пусть $t > \alpha$. Тогда

$$A = 2\sqrt{13}\left(\sin(t - \alpha) + \sin\left(\tfrac{\pi}{3} + \alpha - t\right)\right) = 4\sqrt{13}\,\sin\tfrac{\pi}{6}\cos\left(t - \alpha - \tfrac{\pi}{6}\right) > 2\sqrt{13}\,\cos\tfrac{\pi}{6} = \sqrt{39},$$

поскольку $t - \alpha - \frac{\pi}{6} > -\frac{\pi}{6}$ и $t - \alpha - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \alpha < \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. Таким образом, минимум A реализуется в случае 1). $\square$

3. *Внутри окружности ω расположены пересекающиеся в точках K и L окружности ω_1 и ω_2, касающиеся окружности ω в точках M и N. Оказалось, что точки K, M и N лежат на одной прямой. Найдите радиус окружности ω, если радиусы окружностей ω_1 и ω_2 равны 3 и 5 соответственно.*

Ответ: 8.



Решение. Пусть O, O_1, O_2 — центры окружностей ω, ω_1, ω_2 соответственно. Радиусы OM и O_1M окружностей ω и ω_1 перпендикулярны их общей касательной, проведенной в точке M. Поэтому они параллельны, то есть точка O_1 лежит на отрезке OM. Аналогично получается, что точка O_2 лежит на отрезке ON (см. рисунок). Поскольку треугольники OMN, O_1MK и O_2KN равнобедренные,

$$\angle MKO_1 = \angle KMO_1 = \angle KNO_2 = \angle NKO_2.$$

Следовательно, $KO_1 \parallel NO$ и $KO_2 \parallel MO$, то есть OO_1KO_2 — параллелограмм. Тогда

$$MO = MO_1 + O_1O = MO_1 + KO_2 = 3 + 5 = 8. \quad \square$$

4. *Решите в натуральных числах уравнение $3^x + 5^y + 14 = z!$ (символ $z!$ означает факториал z, то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до z).*

Ответ: $(4, 2, 5)$, $(4, 4, 6)$.

Решение. Очевидно, что $z! > 14$, откуда $z \geqslant 4$. При $z = 4$ мы получим $3^x = 10 - 5^y$, что невозможно, так как 3^x не делится на 5. Таким образом, $z \geqslant 5$ и, в частности, $z!$ делится на 3 и 5. Остаток от деления $5^y + 14$ на 3 равен 1 при нечетных y и 0 при четных y, откуда $y = 2n$. Остаток от деления $3^x + 14$ на 5 равен 2 при нечетных x и 0 при четных x, поэтому $x = 2m$. Заметим, что остатки от деления чисел вида 9^m и 25^n на 7 могут принимать только значения 1, 2 и 4. Так как сумма любой пары из этих чисел не равна 7, левая часть уравнения не делится на 7, и $z!$, значит, тоже. Тогда $z < 7$, то есть $z = 5$ или $z = 6$. Рассмотрим эти случаи.

1) $z \leqslant 5$. Тогда $9^m + 25^n = 106$. Допустимо лишь $n = 1$, что дает $y = 2$, $m = 2$ и $x = 4$.

2) $z \leqslant 6$. Тогда $9^x + 25^n = 706$. Для n допустимы только значения 1 и 2. Нам подходит лишь $n = 2$, при котором $y = 4$, $m = 2$ и $x = 4$. $\square$

5. *В стране Альфия 150 городов, некоторые из которых соединены железнодорожными экспрессами, не останавливающимися на промежуточных станциях. Известно, что любые четыре города можно разбить на две пары так, что между городами каждой пары курсирует экспресс. Какое наименьшее число пар городов соединено экспрессами?*

Ответ: 11 025.

Решение. Предположим, что какой-то город (назовем его Альфском) соединен экспрессами не более чем с 146 городами. Тогда четверка городов, состоящая из Альфска и каких-то трех, с которыми он не соединен, не удовлетворяет условию задачи, поскольку Альфск не может быть в паре ни с одним из трех оставшихся городов. Поэтому каждый город соединен хотя бы с 147 городами. Следовательно, всего пар городов, соединенных экспрессами, не меньше, чем $\frac{147 \cdot 150}{2} = 11\,025$.

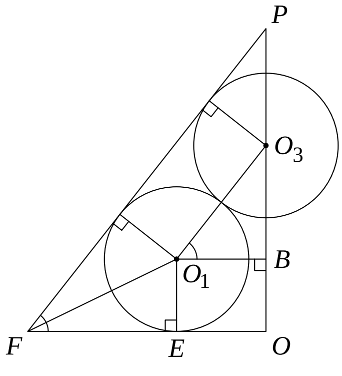
Покажем теперь, что может быть ровно 11 025 пар городов. Занумеруем города числами от 1 до 150 и соединим экспрессами все города, кроме первого и 150-го, а также городов, номера которых отличаются на единицу. Проверим, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Поскольку каждый город соединен экспрессами с 147 городами, общее количество пар соединенных городов в точности равно $\frac{147 \cdot 150}{2} = 11\,025$. Возьмем теперь любую четверку городов. Возможны два случая.

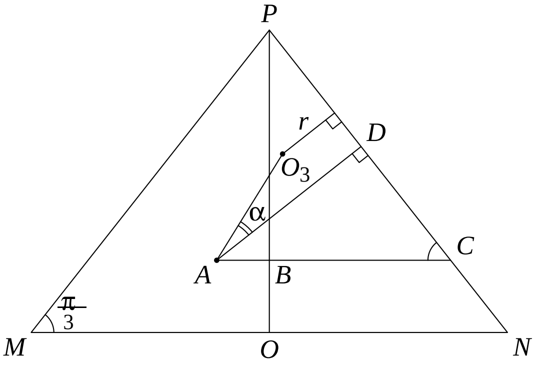
1) *Есть город, не соединенный с двумя из трех остальных городов.* Пусть город A не соединен с городами B и C, но соединен с городом D. Тогда города B и C должны быть соединены между собой, так как остатки от деления их номеров на 150 различаются на 2. Поэтому пары (A, D) и (B, C) нам подходят.

2) *Все города соединены с не менее чем двумя из трех остальных городов.* Пусть город A соединен с городами B и C. По предположению город D должен быть соединен с B или C. Если он соединен с B, то нам подойдут пары (A, C) и (B, D), а если с C, то пары (A, B) и (C, D). $\square$

6. *В конус с радиусом основания 2 и образующей 4 помещены три шара радиуса r. Они касаются друг друга (внешним образом), боковой поверхности конуса, и первые два шара касаются основания конуса. Найдите максимальное значение r.*

Ответ: $\sqrt{3} - 1$.





Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, A — точка касания первых двух, PO — высота конуса, B — проекция O_1 на PO. На левом рисунке показана часть сечения конуса плоскостью POO_1, на правом — сечение плоскостью POA. Заметим, что $AO_3 = r\sqrt{3}$ как высота правильного треугольника $O_1O_2O_3$ со стороной $2r$. Кроме того, $\cos\angle PFO = \frac{OF}{PF} = \frac{1}{2}$, откуда $\angle PFO = \frac{\pi}{3}$ и

$$BO_1 = EO = 2 - EF = 2 - r\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{6} = 2 - r\sqrt{3}.$$

Пусть α — угол между AO_3 и перпендикуляром AD к отрезку PN, $AC \parallel MN$ (см. правый рисунок). Тогда $AD = r + AO_3\cos\alpha = r\left(1 + \sqrt{3}\cos\alpha\right)$. Высота BA равнобедренного треугольника BO_1O_2 равна $\sqrt{BO_1^2 - r^2} = \sqrt{\left(2 - r\sqrt{3}\right)^2 - r^2}$, поэтому она уменьшается с ростом r. Так как $BO = r$, длина BC также убывает с ростом r. Тогда убывающими относительно r будут выражения $AD = (AB + BC)\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos\alpha = \frac{AD - r}{r\sqrt{3}}$. Значит, максимальное значение r будет достигаться при наибольшем α, то есть когда шар с центром в точке O_3 либо вписан в конус, либо касается его основания. Рассмотрим эти случаи.

1) Если шар с центром в точке O_3 вписан в конус, то $O_1O_3 \parallel PF$, откуда $BO_1 = 2r\cos\frac{\pi}{3} = r$ (см. левый рисунок). Тогда $2 - r\sqrt{3} = r$, то есть $r = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1$.

2) Если шар с центром в O_3 касается основания конуса, то точка B — центр правильного треугольника $O_1O_2O_3$, откуда $BO_1 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Поэтому $2 - r\sqrt{3} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, то есть $r = \frac{2\sqrt{3}}{5} < \sqrt{3} - 1$.

Таким образом, максимум r реализуется в первом случае и равен $\sqrt{3} - 1$. $\square$

Вариант 2

1. *В турнире по армрестлингу участвует 2^n+6 спортсменов, где n — натуральное число, бо́льшее 7. За победу дается 1 очко, за поражение — 0 очков. Перед каждым туром пары по жребию составляют из участников, имеющих равное количество очков (те, кому не нашлось пары, пропускают тур). Сколько спортсменов наберут после седьмого тура по 4 очка?*

   Ответ: $35 \cdot 2^{n-7}+2$.

   Решение. Докажем вначале два утверждения.

1) *В турнире с 2^n участниками после m-го тура по k очков будут иметь $2^{n-m} \cdot C_m^k$ спортсменов, где $m \leqslant n$ и $k \in \{0, \ldots, m\}$.* Пусть $f(m,k)$ — число участников, набравших после m туров k очков. Воспользуемся индукцией по m. Если $m=0$, то и $k=0$, а $f(0,0)=2^n$. Проведем индукционный переход. Пусть для некоторого $m<n$ требуемое равенство верно. Тогда каждая группа с одинаковым количеством очков содержит четное число участников, поэтому на пары разобьются все участники. После $(m+1)$-го тура группы спортсменов, не имеющих побед и не имеющих поражений, сократятся вдвое. Поэтому

$$f(m+1,0)=\tfrac{1}{2}f(m,0)=\tfrac{1}{2}\cdot 2^{n-m}=2^{n-(m+1)}\cdot C_{m+1}^0 \quad \text{и} \quad f(m+1,m+1)=\tfrac{1}{2}f(m,m)=2^{n-(m+1)}\cdot C_{m+1}^{m+1}.$$

Пусть теперь $k \in \{1, \ldots, m\}$. После $(m+1)$-го тура по k очков станет у тех, кто имел k очков и проиграл, а также у тех, кто имел $k-1$ очко и выиграл. Поэтому

$$f(m+1,k)=\tfrac{1}{2}\cdot f(m,k)+\tfrac{1}{2}\cdot f(m,k-1)=2^{n-m-1}\left(C_m^k+C_m^{k-1}\right)=2^{n-(m+1)}\cdot C_{m+1}^k$$

(в последнем переходе мы воспользовались основным тождеством треугольника Паскаля). Таким образом, индукционный переход завершен.

2) *Турнир можно свести двум независимым турнирам в группах из 2^n и 6 человек.* Действительно, будем в каждом туре сводить только спортсменов из одной группы. В силу 1) в первой группе всех участников можно разбить на пары. Поэтому при отсутствии у кого-то пары в общем турнире мы можем считать, что этот участник — из второй группы. В конце турнира результаты двух групп просто объединяются.

Вычислим общее количество участников, набравших после седьмого тура по 5 очков. В силу 1) в первой группе их будет $2^{n-7}\cdot C_7^4=35\cdot 2^{n-7}$. Динамика распределения очков среди участников из второй группы до седьмого тура такова:

$$6 \to (3,3) \to (2,3,1) \to (1,3,2) \to (1,2,2,1) \to (1,1,2,2) \to (1,1,1,2,1) \to (1,1,1,1,2).$$

(левая цифра означает число аутсайдеров, правая — число лидеров). Значит, после седьмого тура по 4 очка будут иметь два спортсмена. Таким образом, ответом будет сумма $35\cdot 2^{n-7}$ и 2. $\square$

2. *Найдите наибольшее значение при $a, b>0$ выражения*

$$\frac{|4a-10b|+\left|2(a-b\sqrt{3})-5(a\sqrt{3}+b)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

   Ответ: $2\sqrt{87}$.

   Решение 1. Максимизируемое выражение равно $2(d_1+d_2)$, где d_1, d_2 — расстояния от точки $A(2,5)$ до прямых ℓ_1, ℓ_2, задаваемых уравнениями

$$\ell_1:\ ax-by=0 \quad \text{и} \quad \ell_2:\ (a-b\sqrt{3})x-(a\sqrt{3}+b)y=0.$$

Эти прямые пересекаются в начале координат O. Найдем угол φ между ними:

$$\cos\varphi=\frac{a(a-b\sqrt{3})+b(a\sqrt{3}+b)}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\left(a-b\sqrt{3}\right)^2+\left(a\sqrt{3}+b\right)^2}}=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{4a^2+4b^2}}=\frac{1}{2},$$

то есть $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Пусть $d = OA$, α — угол между ℓ_1 и AB, β — угол между AB и осью OX. Расмотрим два случая.

1) *Точка A лежит внутри острого угла, образуемого прямыми ℓ_1 и ℓ_2.* Тогда

$$2(d_1 + d_2) = 2d\left(\sin\alpha + \sin\left(\tfrac{\pi}{3} - \alpha\right)\right) = 4d\,\sin\tfrac{\pi}{6}\cos\left(\tfrac{\pi}{6} - \alpha\right) = 2d\,\cos\left(\tfrac{\pi}{6} - \alpha\right) \leqslant 2d.$$

2) *Точка A лежит вне острого угла, образуемого прямыми ℓ_1 и ℓ_2.* Тогда

$$2(d_1 + d_2) = 2d\left(\sin\alpha + \sin\left(\tfrac{\pi}{3} + \alpha\right)\right) = 4d\,\cos\tfrac{\pi}{6}\cos\left(\tfrac{\pi}{6} + \alpha\right) \leqslant 2d\sqrt{3}.$$

Равенство в правой части реализуется при $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Такое значение α допусти́мо, поскольку

$$\operatorname{tg}\beta = \tfrac{5}{2} > \sqrt{3}, \quad \text{то есть} \quad \beta > \tfrac{\pi}{3}.$$

Поэтому максимум $2(d_1 + d_2)$ достигается во втором случае, и он равен $2d\sqrt{3} = 2\sqrt{87}$. $\square$

Решение 2. Обозначим максимизируемое выражение через A. Пусть $a = r\cos t$, $b = r\sin t$, где $r > 0$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$\begin{aligned} A &= |4\cos t - 10\sin t| + \left|2(\cos t - \sqrt{3}\sin t) - 5(\sqrt{3}\cos t + \sin t)\right| = \\ &= |4\cos t - 10\sin t| + \left|4\cos\left(t + \tfrac{\pi}{3}\right) - 10\sin\left(t + \tfrac{\pi}{3}\right)\right| = 2\sqrt{29}\left(|\sin(t - \alpha)| + \left|\sin\left(t + \tfrac{\pi}{3} - \alpha\right)\right|\right), \end{aligned}$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{5}$. Заметим, что $\alpha < \frac{\pi}{6}$, поскольку $\frac{2}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $t > \alpha$. Тогда

$$A = 2\sqrt{29}\left(\sin(t - \alpha) + \sin(t + \tfrac{\pi}{3} - \alpha)\right) = 4\sqrt{29}\,\cos\tfrac{\pi}{6}\sin(t + \tfrac{\pi}{6} - \alpha) = 2\sqrt{87}\,\sin(t + \tfrac{\pi}{6} - \alpha).$$

Так как $\alpha < \frac{\pi}{3} + \alpha < \frac{\pi}{2}$, максимум A в случае 1) достигается при $t = \frac{\pi}{3} + \alpha$ и равен $2\sqrt{87}$.

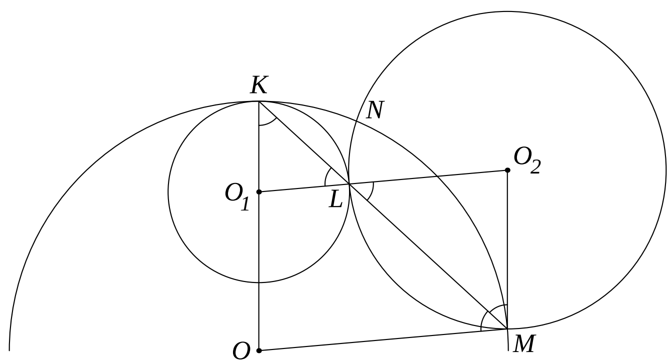
2) Пусть $t \leqslant \alpha$. Тогда

$$A = 2\sqrt{29}\left(\sin(\alpha - t) + \sin(t + \tfrac{\pi}{6} - \alpha)\right) = 4\sqrt{29}\,\sin\tfrac{\pi}{6}\cos(t + \tfrac{\pi}{6} - \alpha) \leqslant 2\sqrt{29} < 2\sqrt{87}.$$

Поэтому максимум A реализуется в случае 1). $\square$

3. *Внутри окружности ω расположена касающаяся ее в точке K окружность ω_1. Окружность ω_2 касается окружности ω_1 в точке L и пересекается с окружностью ω в точках M и N. Оказалось, что точки K, L и M лежат на одной прямой. Найдите радиус окружности ω, если радиусы окружностей ω_1 и ω_2 равны 4 и 7 соответственно.*

Ответ: 11.



Решение. Пусть O, O_1, O_2 — центры окружностей ω, ω_1, ω_2 соответственно. Радиусы OK и O_1K окружностей ω и ω_1 перпендикулярны их общей касательной, проведенной в точке K. Поэтому они параллельны, то есть точка O_1 лежит на отрезке OK (см. рисунок). Поскольку треугольники OKM, O_1KL и O_2LM равнобедренные,

$$\angle KMO = \angle LKO_1 = \angle KLO_1 = \angle MLO_2 = \angle LMO_2.$$

Следовательно, $KO \parallel MO_2$ и $O_1O_2 \parallel MO$, то есть OO_1O_2M — параллелограмм. Тогда

$$OM = O_1O_2 = O_1L + LO_2 = 4 + 7 = 11. \quad \square$$

4. *Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 5^y + 63 = z!$ (символ $z!$ означает факториал z, то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до z).*

   Ответ: $(5, 2, 5)$, $(5, 4, 6)$.

Решение. Очевидно, что $z! > 63$, откуда $z \geqslant 5$ и, в частности, $z!$ делится на 3 и 5. Тогда $2^x - 2$ делится на 5. Поэтому $x - 1$ кратно 4, что дает нечетность x. Кроме того, левая часть дает такой же остаток от деления на 3, как $(-1)^x + (-1)^y = (-1)^y - 1$. Значит, y четно, то есть $y = 2n$. Заметим, что остатки от деления чисел вида 2^x и 25^n на 7 могут принимать только значения 1, 2 и 4. Так как сумма любой пары из этих чисел не равна 7, левая часть уравнения не делится на 7, и $z!$, значит, тоже. Тогда $z < 7$, то есть $z = 5$ или $z = 6$. Рассмотрим эти случаи.

1) $z \leqslant 5$. Тогда $2^x + 25^n = 57$. Допустимо лишь $n = 1$, что дает $y = 2$ и $x = 5$.

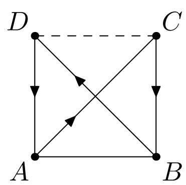
2) $z \leqslant 6$. Тогда $2^x + 25^n = 657$. Для n допустимы только значения 1 и 2. Нам подходит лишь $n = 2$, при котором $y = 4$ и $x = 5$. $\square$

5. *В стране Бетия 125 городов, некоторые из которых соединены железнодорожными экспрессами, не останавливающимися на промежуточных станциях. Известно, что любые четыре города можно объехать по кругу в некотором порядке. Какое наименьшее число пар городов соединено экспрессами?*

   Ответ: 7 688.

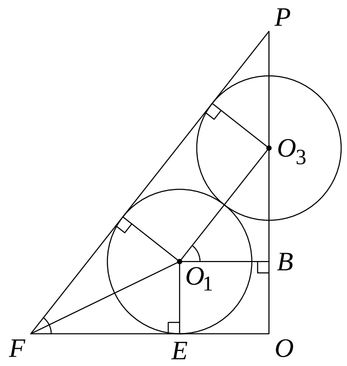
Решение. Предположим, что какой-то город (назовем его Бетск) соединен экспрессами не более чем с 122 городами. Возьмем четверку городов, состоящую из Бетска и каких-то трех городов, с двумя из которых Бетск не соединен. Ее нельзя объехать по кругу, иначе Бетск должен быть связан по крайней мере с двумя городами: из одного в него можно приехать, в другой — уехать. Поэтому каждый город соединен хотя бы с 123 городами. Следовательно, всего пар городов, соединенных экспрессами, не меньше, чем $\frac{123 \cdot 125}{2} = 7\,687\frac{1}{2}$. Но число пар должно быть целым, значит, оно по крайней мере 7 688.

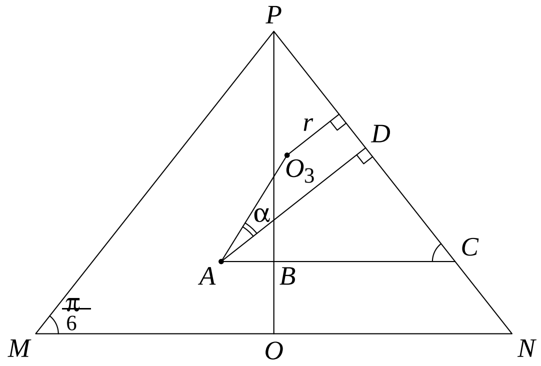
Покажем теперь, что количество пар городов может быть в точности 7 688. Занумеруем города числами от 1 до 125 и соединим экспрессами все пары городов, за исключением пар с номерами $2k - 1$ и $2k$ при $k = 1, 2, \ldots, 62$. Проверим, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Поскольку каждый город соединен экспрессами с 123 городами, а 125-й город с 124 городами, общее количество пар соединенных городов равно $\frac{1}{2}(124 \cdot 123 + 124) = 7\,688$. Возьмем теперь произвольную четверку городов A, B, C, D. В ней каждый из городов соединен не менее чем с двумя из остальных. Предположим, что B соединен с A и C. Если D тоже соединен с A и C, то нам подойдет маршрут $A \to B \to C \to D \to A$. В противном случае D не соединен ровно с одним из городов A и C (пусть это будет C). Тогда C соединен с A, а D — с B, и города можно объехать по кругу $A \to C \to B \to D \to A$. $\square$



6. *В конус с высотой 4 и образующей 8 помещены три шара радиуса r. Они касаются друг друга (внешним образом), боковой поверхности конуса, и первые два шара касаются основания конуса. Найдите максимальное значение r.*

   Ответ: $\frac{12}{5+2\sqrt{3}}$.





Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, A — точка касания первых двух, PO — высота конуса, B — проекция O_1 на PO. На левом рисунке показана часть сечения конуса плоскостью POO_1, на правом — сечение плоскостью POA. Заметим, что $AO_3 = r\sqrt{3}$ как высота правильного треугольника $O_1O_2O_3$ со стороной $2r$. Кроме того, $\sin\angle PFO = \frac{PO}{PF} = \frac{1}{2}$, откуда $\angle PFO = \frac{\pi}{6}$, $OF = 4\sqrt{3}$ и

$$BO_1 = EO = 4\sqrt{3} - EF = 4\sqrt{3} - r\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{12} = 4\sqrt{3} - r\cdot\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{3} - r\left(\sqrt{3}+2\right).$$

Пусть α — угол между AO_3 и перпендикуляром AD к отрезку PN, $AC \parallel MN$ (см. правый рисунок). Тогда $AD = r + AO_3\cos\alpha = r\,(1+\sqrt{3}\cos\alpha)$. Высота BA равнобедренного треугольника BO_1O_2 равна $\sqrt{BO_1^2 - r^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{3} - r\,(\sqrt{3}+2)\right)^2 - r^2}$, поэтому она уменьшается с ростом r. Поскольку $BO = r$, длина BC также убывает с ростом r. Тогда убывающими относительно r будут выражения $AD = \frac{1}{2}\,(AB + BC)$ и $\cos\alpha = \frac{AD-r}{r\sqrt{3}}$. Значит, максимальное значение r будет достигаться при наибольшем α, то есть когда шар с центром в точке O_3 либо вписан в конус, либо касается его основания. Рассмотрим эти случаи.

1) Если шар с центром в точке O_3 вписан в конус, то $O_1O_3 \parallel PF$, откуда $BO_1 = 2r\cos\frac{\pi}{6} = r\sqrt{3}$ (см. левый рисунок). Тогда $4\sqrt{3} - r(\sqrt{3}+2) = r\sqrt{3}$, то есть $r = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 3 - \sqrt{3}$.

2) Если шар с центром в O_3 касается основания конуса, то точка B — центр правильного треугольника $O_1O_2O_3$, откуда $BO_1 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Поэтому $4\sqrt{3} - r(\sqrt{3}+2) = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, то есть $r = \frac{12}{5+2\sqrt{3}} > 3 - \sqrt{3}$.

Таким образом, максимум r реализуется во втором случае и равен $\frac{12}{5+2\sqrt{3}}$. $\square$

Вариант 3

1. *В турнире по армрестлингу участвует 510 спортсменов. За победу начисляется 1 очко, за поражение — 0 очков. Если победитель изначально имел меньше очков, чем соперник, то ему дополнительно передается одно очко проигравшего. В каждом туре встречаются участники, у которых количество очков отличается не более чем на 1. Турнир заканчивается, как только определяется единоличный лидер. Какое минимальное количество туров придется провести?*

   Ответ: 9.

   Решение. Пусть перед очередным туром в лидирующей группе находится $N = 2m + k$ спортсменов, причем $2m$ из них встретятся друг с другом, а k — с участниками, имеющими на очко меньше. Заметим, что если встречаются спортсмены, имеющие n и $n+1$ очко, у них при любом результате окажется n и $n+2$ очков. Значит, после тура в лидирующей группе окажется $m+k$ участников. Минимальное значение этой суммы равно $\frac{N}{2}$ при четном N и $\frac{N+1}{2}$ при нечетном N. В условиях задачи после первого тура будет не менее 255 лидеров, после второго — не менее 128, и далее после каждого тура число лидеров будет сокращаться не более чем вдвое. Поэтому придется провести не менее $2 + \log_2 128 = 9$ туров.

   Покажем, что в 9 туров можно уложиться. Докажем два утверждения.

   1) *В турнире с 2^n участниками победителя можно выявить за n туров.* Воспользуемся индукцией по n. Для $n = 1$ все очевидно. Пусть для некоторого n утверждение верно. Тогда в турнире с 2^{n+1} участниками после первого тура по 2^n спортсменов наберут 0 очков и 1 очко. Проведем в этих группах два независимых турнира. По индукционному предположению их оба можно завершить за n туров. Победитель второго турнира станет общим победителем, и определится он за $n+1$ тур.

   2) *При $n \geqslant 3$ в турнире с $2^n - 2$ участниками победителя можно выявить за n туров.* После первого тура по $2^{n-1} - 1$ спортсменов наберут 0 очков и 1 очко. Если во втором туре только в одной паре соперники имеют разное количество очков, то после тура по 2^{n-2} участников наберут 0 очков и 2 очка, а $2^{n-1} - 2$ участников — 1 очко. Воспользуемся теперь индукцией по n. При $n = 3$ сведем друг с другом спортсменов с равным числом очков, после чего турнир завершится. Пусть $n > 3$ и для $n-1$ утверждение верно. В силу 1) и индукционного предположения в группах с 0, 1, 2 очками можно организовать независимые турниры, причем в первой и третьей они завершатся за $n-2$ тура, а во второй — за $n-1$ тур (но последний тур не потребуется). Победитель третьей группы выиграет и весь турнир, поскольку он наберет $n+1$ очко, а участники из других групп — не более n очков. В итоге турнир продлится n туров.

   Осталось применить утверждение 2) при $n = 9$. $\square$

2. *Найдите наибольшее значение при $a, b \geqslant 1$ выражения*

$$\frac{|7a + 8b - ab| + |2a + 8b - 6ab|}{a\sqrt{1+b^2}}.$$

   Ответ: $9\sqrt{2}$.

   Решение 1. Максимизируемое выражение равно $d_1 + d_2$, где d_1, d_2 — расстояния от точек $A(7,1)$ и $B(2,6)$ до прямой ℓ, задаваемой уравнением $ax - aby + 8b = 0$. Его можно переписать в виде $y = \frac{1}{b}x + \frac{8}{a}$ или $y = px + q$, где $p \in (0,1]$, $q \in (0,8]$. Рассмотрим три случая.

   1) *Прямая ℓ пересекает отрезок AB.* Тогда $d_1 + d_2 = AB \cdot \sin\alpha$, где α — угол между ℓ и AB. Значение $\alpha = \frac{\pi}{2}$ реализуется при $p = 1$ и $q \leqslant 4$. Поэтому максимум $d_1 + d_2$ равен в данном случае длине AB, то есть $5\sqrt{2}$.

   2) *Точка B лежит ниже ℓ.* Тогда d_1 и d_2 возрастают при увеличении p и q, то есть при уменьшении a и b. Значит, максимум $d_1 + d_2$ достигается при $a = b = 1$, и он равен $9\sqrt{2}$.

   3) *Точка A лежит выше ℓ.* Тогда d_1 и d_2 увеличиваются при уменьшении p и q, то есть при приближении ℓ к оси OX. Но сумма расстояний от A и B до OX равна 7, что меньше $9\sqrt{2}$. Поэтому максимум $d_1 + d_2$ реализуется в первом случае и равен $9\sqrt{2}$. $\square$

   Решение 2. Обозначим максимизируемое выражение через A. Поделив числитель и знаменатель A на ab, мы получим

$$A = \frac{\left|\frac{7}{b} + \frac{8}{a} - 1\right| + \left|\frac{2}{b} + \frac{8}{a} - 6\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^2}}} = \frac{|7(x+1) - 8y| + |2(x+1) - 8y|}{\sqrt{1+x^2}},$$

где $x = \frac{1}{b} \in (0,1]$, $y = 1 - \frac{1}{a} \in [0,1)$. Заметим, что для $u, v \geqslant 0$ верно неравенство $u + v \leqslant \sqrt{2\left(u^2+v^2\right)}$. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $8y \leqslant 2(x+1)$. Тогда

$$A = \frac{7(x+1) - 8y + 2(x+1) - 8y}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{9(x+1)}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{16y}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{9(x+1)}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 9\sqrt{2},$$

причем в первом неравенстве равенство реализуется при $y = 0$, а во втором — при $x = 1$. Поэтому максимум A равен в данном случае $9\sqrt{2}$.

2) Пусть $2(x+1) < 8y \leqslant 7(x+1)$. Тогда

$$A = \frac{7(x+1) - 8y - 2(x+1) + 8y}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{5(x+1)}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 5\sqrt{2} < 9\sqrt{2}.$$

Значит, этот случай не дает максимального значения A.

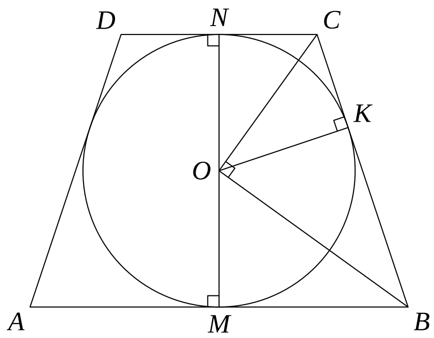
3) Пусть $8y > 7(x+1)$. Заметим, что $x + 1 \geqslant \sqrt{x^2+1}$. Тогда

$$A = \frac{8y - 7(x+1) - 2(x+1) + 8y}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{16y}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{9(x+1)}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 16 - \frac{9(x+1)}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 16 - 9 = 7 < 9\sqrt{2},$$

то есть и в этом случае максимум A не достигается. $\square$

3. *В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AB и DC вписана окружность с центром в точке O. Найдите площадь трапеции, если $OB = b$ и $OC = c$.*

Ответ: $2bc$.



Решение. Пусть r — радиус окружности, K — точка касания окружности со стороной BC, MN — высота трапеции, проходящая через точку O (см. рисунок). Заметим, что по трем сторонам равны треугольники OCN и OCK, а также треугольники OBM и OBK. Тогда

$$180^\circ = \angle NOK + \angle KOM = 2\angle COK + 2\angle KOB = 2\angle COB,$$

откуда $\angle COB = 90^\circ$. Так как трапеция описанная и равнобедренная, мы получаем $AB + DC = 2BC$. Поэтому

$$S_{ABCD} = MN \cdot \tfrac{1}{2}(AB + DC) = 2r \cdot BC = 4S_{BOC} = 2bc. \quad \square$$

4. *Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 3^y + 7 = z!$ (символ $z!$ означает факториал z, то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до z).*

Ответ: $(3,2,4)$, $(5,4,5)$.

Решение. Заметим, что $z! > 7$, откуда $z \geqslant 4$ и, в частности, $z!$ делится на 3 и на 8. Остаток левой части от деления на 3 такой же, как у $(-1)^x + 1$, поэтому x нечетно. Кроме того, остаток от деления $3^y + 7$ на 8 равен 2 при нечетном y и 0 при четном y. Первый случай невозможен, поскольку $2^x + 2$ не делится на 8 ни при каком x. Значит, $y = 2n$ и $2^x + 9^n + 7 = z!$. Заметим, наконец, что остатки от деления степеней двойки и девятки на 7 принимают только значения 1, 2 и 4. Так как сумма любой пары из этих чисел не равна 7, левая часть уравнения не делится на 7, и $z!$, значит, тоже. Тогда $z < 7$, то есть $z \in \{4, 5, 6\}$. Рассмотрим эти случаи.

1) $z = 4$. Тогда $2^x + 9^n = 24$. Допустимо лишь $n = 1$, что дает $y = 2$ и $x = 4$.

2) $z = 5$. Тогда $2^x + 9^n = 120$. Для n допустимы только значения 1 и 2. Нам подходит лишь $n = 2$, при котором $y = 4$ и $x = 4$.

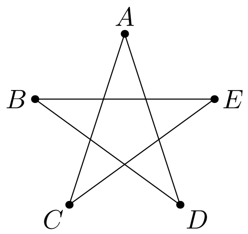
3) $z = 6$. Тогда $2^x + 9^n = 720$. Здесь тоже n может принимать только значения 1 и 2, но ни одно из них нам не подходит. $\square$

5. *В деревне Сосновка 240 жителей, некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых пятерых жителей можно посадить за круглый стол так, что каждый из них будет знаком с обоими своими соседями. Какое наименьшее число пар знакомых жителей может быть в Сосновке?*

Ответ: 28 440.

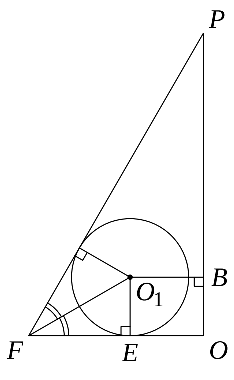
Решение. Предположим, что какой-то житель (назовем его Петей) не знаком хотя бы с тремя жителями. Выберем следующих пятерых людей: Петю, троих незнакомых ему жителей и еще одного произвольного человека. Их нельзя нужным образом разместить за круглым столом, поскольку с одной стороны от Пети обязательно будет сидеть незнакомый ему человек. Значит, у каждого жителя деревни не может быть более двух незнакомых людей. Поэтому каждый знаком с не менее чем 236 жителями, и всего пар знакомых не меньше, чем $\frac{240 \cdot 237}{2} = 28\,440$.

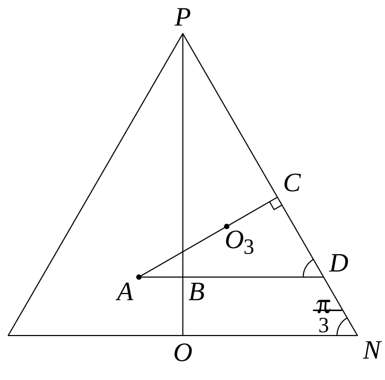
Покажем теперь, что число пар знакомых может быть в точности 28 440. Посадим всех жителей за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом. Проверим, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Поскольку каждый житель не знаком ровно с двумя другими, он знаком в точности с 237 людьми, и общее количество пар знакомых равно $\frac{240 \cdot 237}{2} = 28\,440$. Возьмем теперь произвольную пятерку жителей и рассадим их требуемым образом. Удалим всех остальных из-за большого круглого стола и обозначим оставшихся в циклическом порядке через A, B, C, D, E. Тогда нас устроит рассадка A, C, E, B, D. Действительно, любые два новых соседа не сидели рядом за большим круглым столом и потому знают друг друга. $\square$



6. *В конус, у которого диаметр основания равен образующей, помещены три одинаковых шара, касающихся друг друга внешним образом. Два шара касаются боковой поверхности и основания конуса. Третий шар касается боковой поверхности конуса в точке, лежащей в одной плоскости с центрами шаров. Найдите отношение радиусов основания конуса и шаров.*

Ответ: $\frac{5}{4} + \sqrt{3}$.





Решение: Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, A — точка касания первых двух, PO — высота конуса, B — проекция O_1 на PO, C — точка касания третьего шара с конусом, R и r — радиусы основания конуса и шара соответственно. На левом рисунке показана часть сечения конуса плоскостью POO_1, на правом — сечение плоскостью POA. Заметим, что $AO_3 = r\sqrt{3}$ как высота правильного треугольника $O_1O_2O_3$ со стороной $2r$. Точка C лежит в плоскости $O_1O_2O_3$ и, в силу симметрии, в плоскости AO_3P. Поэтому она лежит на прямой AO_3. Но радиус CO_3 перпендикулярен образующей PN (см. правый рисунок), откуда $AC \perp PN$. Тогда $AC = r\bigl(1+\sqrt{3}\bigr)$. По условию $\angle ADC = \angle ONP = \frac{\pi}{3}$, что дает

$$AB = AD - BD = \frac{AC}{\sin\frac{\pi}{3}} - \bigl(R - r\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{3}\bigr) = 2r\bigl(1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\bigr) + \tfrac{r}{\sqrt{3}} - R = r\bigl(2+\sqrt{3}\,\bigr) - R.$$

С другой стороны, из левого рисунка

$$BO_1 = EO = R - EF = R - r\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{6} = R - r\sqrt{3} \quad \text{и} \quad AB = \sqrt{BO_1^2 - r^2} = \sqrt{\bigl(R - r\sqrt{3}\,\bigr)^2 - r^2},$$

так как AB — высота равнобедренного треугольника BO_1O_2 с основанием $2r$. Таким образом, мы пришли к равенству $\sqrt{\bigl(R - r\sqrt{3}\,\bigr)^2 - r^2} = r\bigl(2+\sqrt{3}\,\bigr) - R$. Возводя его в квадрат при условии $R \leqslant r\bigl(2+\sqrt{3}\,\bigr)$, мы получим

$$R^2 - 2Rr\sqrt{3} + 2r^2 = r^2\bigl(7+4\sqrt{3}\,\bigr) - 2Rr\bigl(2+\sqrt{3}\,\bigr) + R^2 \iff r^2\bigl(5+4\sqrt{3}\,\bigr) = 4Rr \iff \tfrac{R}{r} = \tfrac{5}{4} + \sqrt{3}.$$

Условие на радиусы, очевидно, выполняется. $\square$

Вариант 4

1. *В теннисном турнире участвует 254 школьника. За победу дается 1 очко, за поражение — 0 очков. Если победитель изначально имел меньше очков, чем соперник, то ему дополнительно передается одно очко проигравшего. В каждом туре встречаются участники с равным количеством очков, но в одной из пар допускается разница между соперниками в 1 очко. Турнир заканчивается, как только определяется единоличный лидер. Сколько школьников завершит турнир с 5 очками?*

Ответ: 56.

Решение. Обозначим через $f(m,k)$ количество школьников, имеющих после m туров k очков. Если $f(m,k)$ четны при любом $k \in \{0,\ldots,m\}$, то участники с разным количеством очков не будут встречаться в $(m+1)$-м туре (иначе таких встреч было бы не меньше двух). Заметим также, что если встречаются спортсмены, имеющие n и $n+1$ очко, у них при любом результате окажется n и $n+2$ очков. Докажем два утверждения.

1) *В турнире с 2^n участниками после m-го тура по k очков будут иметь $2^{n-m} \cdot C_m^k$ спортсменов, где $m \leqslant n$ и $k \in \{0,\ldots,m\}$.* Пусть $f(m,k)$ — число участников, набравших после m туров k очков. Воспользуемся индукцией по m. Если $m=0$, то и $k=0$, а $f(0,0)=2^n$. Проведем индукционный переход. Пусть для некоторого $m<n$ требуемое равенство верно. Тогда каждая группа с одинаковым количеством очков содержит четное число участников, поэтому на пары разобьются все участники. После $(m+1)$-го тура группы спортсменов, не имеющих побед и не имеющих поражений, сократятся вдвое. Поэтому

$$f(m+1,0)=\tfrac{1}{2}f(m,0)=\tfrac{1}{2}\cdot 2^{n-m}=2^{n-(m+1)}\cdot C_{m+1}^0 \quad \text{и} \quad f(m+1,m+1)=\tfrac{1}{2}f(m,m)=2^{n-(m+1)}\cdot C_{m+1}^{m+1}.$$

Пусть теперь $k \in \{1,\ldots,m\}$. После $(m+1)$-го тура по k очков станет у тех, кто имел k очков и проиграл, а также у тех, кто имел $k-1$ очко и выиграл. Поэтому

$$f(m+1,k)=\tfrac{1}{2}\cdot f(m,k)+\tfrac{1}{2}\cdot f(m,k-1)=2^{n-m-1}\left(C_m^k+C_m^{k-1}\right)=2^{n-(m+1)}\cdot C_{m+1}^k$$

(в последнем переходе мы воспользовались основным тождеством треугольника Паскаля). Таким образом, индукционный переход завершен.

2) *В турнире с 2^n-2 участниками и менее чем n турами числа $f(2m,k)$ четны при любом k от 0 до n, числа $f(2m-1,k)$ нечетны только при $k=m-1$ и $k=m$.* Воспользуемся индукцией по n. Для $n=2$ все очевидно. Пусть для некоторого n утверждение верно. Тогда в турнире с 2^{n+1} участниками после первого тура по 2^n-1 спортсменов наберут 0 очков и 1 очко. После второго тура по 2^{n-1} участников наберут 0 очков и 2 очка, а 2^n-2 участников — 1 очко. Осталось для первых двух групп воспользоваться 1), а для третьей — индукционным предположением.

Введем теперь фиктивных участников A и B. Пусть в нечетном туре они играют между собой и A выигрывает; это не сказывается на других участниках. Кроме того, пусть при любом m в $(2m)$-м туре A играет с неким A' и проигрывает, а B выигрывает у некого B'. Тогда у A' должно быть m очков, а у B' — $(m-1)$ очко. В силу 2) числа $f(2m-1,m-1)$ и $f(2m-1,m)$ нечетны, а в силу 1) после добавления A и B они станут четными. Поэтому в отсутствие A и B участники A' и B' должны играть между собой; в результате они наберут $m-1$ и $m+1$ очков, как и после встреч с A и B. Значит, добавление A и B не влияет на распределение очков у остальных участников.

Применим теперь утверждение 1) при $n=8$. Турнир закончится через 8 туров, и по 5 очков в нем наберут $C_8^5=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ участников. Осталось заметить, что A и B наберут по 4 очка и, значит, в это число не войдут. $\square$

2. *Найдите наименьшее значение при $a,b \geqslant 0$ выражения*

$$\frac{|a-3b-2|+|3a-b|}{\sqrt{a^2+(b+1)^2}}.$$

Ответ: 2.

Решение 1. Минимизируемое выражение равно d_1+d_2, где d_1, d_2 — расстояния от точек $A(1,3)$ и $B(3,1)$ до прямой ℓ, задаваемой уравнением $ax-(b+1)y+1=0$. Его можно переписать в виде

$y = \frac{a}{b+1}\,x + \frac{1}{b+1}$ или $y = px + q$, где $p \geqslant 0$, $q \in (0,1]$. Можно считать, что прямая ℓ пересекает отрезок AB, иначе повернем ее относительно точки $C(0,q)$ в сторону AB, уменьшая d_1 и d_2. Тогда $d_1 + d_2 = AB \cdot \sin\alpha$, где α — угол между прямыми ℓ и AB. Правая часть достигает минимума при наименьшем значении угла α, которое реализуется при $\alpha = \angle CAB$ или $\alpha = \angle CBA$. Оба этих угла не меньше $\frac{\pi}{4}$, и $\angle CBA = \frac{\pi}{4}$ при $a = b = 0$. Поэтому минимум $d_1 + d_2$ равен $AB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$. $\square$

Решение 2. Пусть A — максимизируемое выражение, $c = b + 1 \geqslant 1$. Тогда

$$A = \frac{|a - 3c + 1| + |3a - c + 1|}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Рассмотрим три случая.

1) Пусть $c \geqslant 3a + 1$. Тогда

$$A = \frac{3c - a - 1 + c - 3a - 1}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{4c - 4a - 2}{\sqrt{a^2 + c^2}} \geqslant \frac{8a + 2}{\sqrt{a^2 + (3a+1)^2}} = \frac{8a + 2}{\sqrt{10a^2 + 6a + 1}},$$

причем неравенство обращается в равенство при $c = 3a + 1$. Кроме того,

$$\frac{(8a+2)^2}{10a^2 + 6a + 1} = \frac{64a^2 + 32a + 4}{10a^2 + 6a + 1} \geqslant \frac{40a^2 + 24a + 4}{10a^2 + 6a + 1} = 4,$$

а при $a = 0$ достигается равенство. Таким образом, минимум A реализуется при $a = 0$, $c = 1$ и равен 2.

2) Пусть $\frac{a+1}{3} \leqslant c < 3a + 1$. Тогда

$$A = \frac{3c - a - 1 - c + 3a + 1}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{2(c + a)}{\sqrt{a^2 + c^2}} \geqslant 2,$$

так как $c + a \geqslant \sqrt{a^2 + c^2}$. Поэтому мы не получим меньшего значения A, чем в 1).

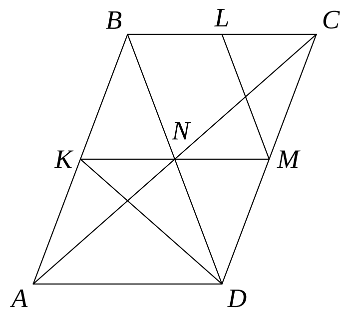
3) Пусть $c < \frac{a+1}{3}$. Тогда в силу 1)

$$A = \frac{a - 3c + 1 + 3a - c + 1}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{4a - 4c + 2}{\sqrt{a^2 + c^2}} > \frac{\frac{8}{3}a + \frac{2}{3}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a+1}{3}\right)^2}} = \frac{8a + 2}{\sqrt{10a^2 + 2a + 1}} \geqslant \frac{8a + 2}{\sqrt{10a^2 + 6a + 1}} \geqslant 2.$$

Значит, в этом случае минимум A не реализуется. $\square$

3. *Точки K, L и M — середины сторон AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$. Оказалось, что четырехугольники $KBLM$ и $BCDK$ — вписанные. Найдите отношение $AC : AD$.*

Ответ: 2.



Решение. Пусть N — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Четырехугольник $KBLM$ — вписанная трапеция, поэтому $KB = LM$. Умножая это равенство на 2, мы получим $AB = BD$. Тогда $AK = DN$ и

$$\angle AKN = 180^\circ - \angle KAD = 180^\circ - \angle ADN = \angle DNK.$$

Значит, треугольники AKN и DNK равны, откуда $DK = AN$. С другой стороны, $BCDK$ — тоже вписанная трапеция, поэтому $DK = BC = AD$. Тогда

$$\frac{AC}{AD} = \frac{2AN}{AD} = \frac{2AN}{DK} = 2. \quad \square$$

4. *Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 3^y - 7 = z!$ (символ $z!$ означает факториал z, то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до z).*

Ответ: $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$.

Решение. Рассмотрим два случая.

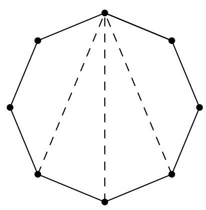
1) $z \leqslant 3$. Так как левая часть уравнения четна, $z = 1$ не подходит. При $z = 2$ мы получим $2^x = 9 - 3^y$, что невозможно, так как 2^x не делится на 3. Поскольку $2^2 + 3^2 - 7 = 3!$, случай $z = 3$ дает решение $(2, 2, 3)$ (и, очевидно, только его).

2) $z \geqslant 4$. Правая часть уравнения делится на три и на восемь. Заметим, что остаток от деления $3^y - 7$ на 8 может принимать только значения 2 и 4. Но $2^x + 2$ не делится на 8 ни при каком x, а $2^x + 4$ делится на 8 только при $x = 2$. Значит, $x = 2$, и уравнение приводится к виду $3^y - 3 = z!$. Его левая часть делится на три, но не делится на девять. Поэтому $z \leqslant 5$, то есть $z = 4$ или $z = 5$. В первом случае $3^y = 27$, откуда $y = 3$, а второй приводит к уравнению $3^y = 123$, не имеющему натуральных решений. $\square$

5. *В деревне Берёзовка 200 жителей, некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых шестерых жителей можно посадить за круглый стол так, что каждый из них будет знаком с обоими своими соседями. Какое наименьшее число пар знакомых жителей может быть в Берёзовке?*

Ответ: 19 600.

Решение. Предположим, что какой-то житель (назовем его Васей) не знаком хотя бы с четырьмя жителями. Выберем следующую шестерку людей: Васю, четверых незнакомых ему жителей и еще одного произвольного человека. Их нельзя нужным образом разместить за круглым столом, поскольку с одной стороны от Васи обязательно будет сидеть ему незнакомый человек. Значит, у каждого жителя деревни не может быть более трех незнакомых людей. Поэтому каждый знаком с не менее чем 196 жителями, и количество пар знакомых не меньше, чем $\frac{200 \cdot 196}{2} = 19\,600$.



Покажем теперь, что число пар знакомых может быть в точности 19 600. Посадим всех жителей за большой круглый стол. Назовем двух людей *сидящими почти напротив*, если между ними в обоих направлениях сидит не менее 98 человек. Познакомим теперь друг с другом всех жителей кроме сидящих почти напротив. Поскольку каждый житель не знаком ровно с тремя другими, он знаком в точности с 196 людьми, и общее количество пар знакомых равно $\frac{200 \cdot 196}{2} = 19\,600$. Возьмем теперь произвольную шестерку жителей и обозначим их (в порядке расположения за столом) через $A_1, \ldots, A_6$. Если в этом цикле все соседи знакомы друг с другом — искомая рассадка найдена. В противном случае существуют два незнакомых соседа (пусть это будут A_1 и A_2). Занумеруем всех людей за большим столом в том же циклическом порядке числами от 1 до 200, начиная с A_1. Заметим, что номера двух незнакомых жителей могут различаться только на 99, 100 или 101. Пусть $N_1, \ldots, N_6$ — номера $A_1, \ldots, A_6$ соответственно. Тогда $N_1 = 1$ и $N_2 \geqslant N_1 + 99 = 100$. Поскольку числа N_i натуральные и строго возрастающие, при $i \geqslant 2$ справедливы неравенства $98 + i \leqslant N_i \leqslant 194 + i$. Сделаем два простых наблюдения.

1) *Житель A_1 знаком с A_5 и A_6.* Действительно, при $i = 5$ или $i = 6$

$$N_i - N_1 = N_i - 1 \geqslant N_5 - 1 \geqslant 103 - 1 = 102 > 101.$$

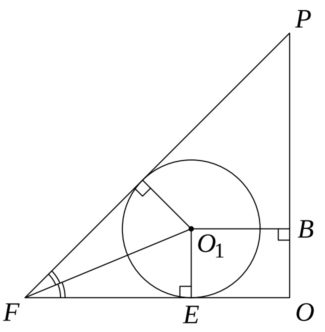
2) *При $2 \leqslant j < i \leqslant j+2$ жители A_i и A_j знакомы.* Действительно, $N_i > N_j$ и

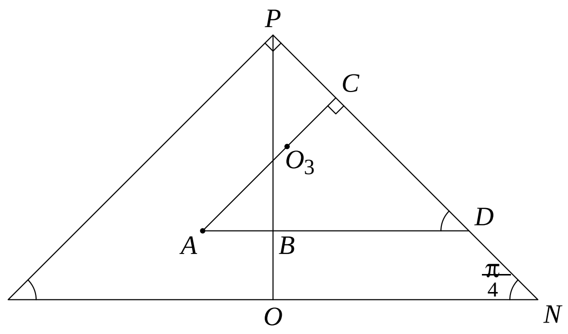
$$N_i - N_j \leqslant 194 + i - (98 + j) = 96 + (i - j) \leqslant 98 < 99.$$

Теперь из 1) и 2) вытекает, что циклическая рассадка $A_1 \to A_5 \to A_3 \to A_2 \to A_4 \to A_6 \to A_1$ удовлетворяет условию задачи. □

6. *В конус помещены три шара радиуса $\sqrt{24}$, касающихся друг друга внешним образом. Два шара касаются боковой поверхности и основания конуса. Третий шар касается боковой поверхности конуса в точке, лежащей в одной плоскости с центрами шаров. Найдите радиус основания конуса, если известно, что он равен высоте конуса.*

Ответ: $7 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$.





Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, A — точка касания первых двух, PO — высота конуса, B — проекция O_1 на PO, C — точка касания третьего шара с конусом, R — радиус основания конуса, $r = \sqrt{24}$. На левом рисунке показана часть сечения конуса плоскостью POO_1, на правом — сечение плоскостью POA. Заметим, что $AO_3 = r\sqrt{3}$ как высота правильного треугольника $O_1O_2O_3$ со стороной $2r$. Точка C лежит в плоскости $O_1O_2O_3$ и, в силу симметрии, в плоскости AO_3P. Поэтому она лежит на прямой AO_3. Но радиус CO_3 перпендикулярен образующей PN (см. правый рисунок), откуда $AC \perp PN$. Тогда $AC = r\bigl(1 + \sqrt{3}\bigr)$. По условию $\angle ADC = \angle ONP = \frac{\pi}{4}$, что дает

$$AB = AD - BD = AC\sqrt{2} - (R - r) = r\bigl(1 + \sqrt{2} + \sqrt{6}\bigr) - R.$$

С другой стороны, из левого рисунка

$$BO_1 = EO = R - EF = R - r\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{8} \quad \text{и} \quad AB = \sqrt{BO_1^2 - r^2} = \sqrt{\bigl(R - r\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{8}\bigr)^2 - r^2},$$

так как AB — высота равнобедренного треугольника BO_1O_2 с основанием $2r$. Мы пришли к равенству $\sqrt{\bigl(R - r\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\bigr)^2 - r^2} = r\bigl(1 + \sqrt{2} + \sqrt{6}\bigr) - R$. Возводя его в квадрат при условии $R \leqslant r\bigl(1 + \sqrt{2} + \sqrt{6}\bigr)$, мы получим

$$R^2 - 2Rr\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{8} + \bigl(\operatorname{ctg}^2\tfrac{\pi}{8} - 1\bigr)r^2 = R^2 - 2Rr\bigl(1 + \sqrt{2} + \sqrt{6}\bigr) + \bigl(9 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\bigr)r^2.$$

Заметим, что $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 1 + \sqrt{2}$, $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{8} - 1 = 2 + 2\sqrt{2}$. Поэтому

$$2\sqrt{6}\,Rr = \bigl(7 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\bigr)r^2 \iff R = 7 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}.$$

Условие на радиусы, очевидно, выполняется. □

Вариант 5

1. *В теннисном турнире участвует 1152 школьника. За победу дается 1 очко, за поражение — 0 очков. Перед каждым туром пары по жребию составляют из участников, имеющих равное количество очков (тем, кому не нашлось пары, начисляют очко без игры). После второго поражения спортсмен выбывает из турнира. Турнир продолжается, пока можно составить хотя бы одну пару соперников. Сколько туров придется провести?*

Ответ: 14.

Решение. Заметим, что $1152 = 1024 + 128$. Докажем вначале два утверждения.

1) *В турнире с 2^n участниками при любом $m \in \{1, \dots, n\}$ после m-го тура останется 2^{n-m} школьников, не имеющих поражений, и $m \cdot 2^{n-m}$ школьников с одним поражением.* Воспользуемся индукцией по m. Для $m = 1$ все очевидно. Пусть для некоторого $m < n$ утверждение верно. Тогда перед $(m+1)$-м туром на пары разобьются все участники. После тура количество спортсменов, не имеющих поражений, сократится вдвое, то есть станет равным 2^{n-m-1}. По одному поражению станет у тех, кто проиграл в группе лидеров (их 2^{n-m-1} человек), и у тех, кто уже имел одно поражение и выиграл (по индукционному предположению их $m \cdot 2^{n-m-1}$ человек). В сумме мы получим $(m+1) \cdot 2^{n-m-1}$. Остальные участники покинут турнир. Таким образом, индукционный переход завершен.

2) *Можно разбить участников на две группы из* 1024 *и* 128 *школьников и считать, что первые* 10 *туров они играют отдельные турниры.* Действительно, будем в каждом туре сводить только спортсменов из одной группы. В силу 1) в первой группе всех участников можно разбить на пары. Поэтому при отсутствии у кого-то пары в общем турнире мы можем считать, что этот участник — из второй группы. После 10 туров результаты двух групп просто объединяются.

Посчитаем теперь количество туров. Будем записывать оставшихся участников в виде пар (a, b), где b — количество лидеров, a — число спортсменов с одним поражением. В силу 1) в первой группе после десятого тура на турнире останется $(10, 1)$ участников. Во второй группе после седьмого тура будет $(7, 1)$ участников, а дальше их число меняется так:

$$(7,1) \to (4,1) \to (2,1) \to (1,1).$$

В сумме после десятого тура на турнире останется $(11, 2)$ школьников. Их дальнейшая динамика до четырнадцатого тура такова:

$$(11,2) \to (7,1) \to (4,1) \to (2,1) \to (1,1).$$

После этого ни одной пары составить нельзя, и турнир завершается. $\square$

2. *Найдите наименьшее значение при $a, b > 0$ выражения*

$$\frac{\bigl|2a - b + 2a(b-a)\bigr| + \bigl|b + 2a - a(b+4a)\bigr|}{\sqrt{4a^2 + b^2}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Решение 1. Минимизируемое выражение равно $d_1 + d_2$, где d_1, d_2 — расстояния от точки $A(1,1)$ до прямых ℓ_1, ℓ_2, задаваемых уравнениями

$$\ell_1 : \ 2ax - by + 2a(b-a) = 0 \quad \text{и} \quad \ell_2 : \ bx + 2ay - a(b+4a) = 0.$$

Эти прямые перпендикулярны и пересекаются в точке $B(a, 2a)$. Пусть α — угол между прямыми AB и ℓ_2. Тогда $\alpha \in \bigl[0, \frac{\pi}{2}\bigr]$ и

$$d_1 + d_2 = AB \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha) = AB \cdot \sqrt{2}\sin\bigl(\alpha + \tfrac{\pi}{4}\bigr) \geqslant AB = \sqrt{(1-a)^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{5a^2 - 6a + 2} \geqslant \tfrac{1}{\sqrt{5}}.$$

Второе неравенство становится равенством при $a = \frac{3}{5}$. Если и $b = \frac{3}{5}$, то $A \in \ell_2$ и $\alpha = 0$, поэтому в первом неравенстве также реализуется равенство. $\square$

Решение 2. Пусть $t = \frac{b}{2a}$, X — минимизируемая дробь. Поделив числитель и знаменатель X на $2a$, мы получим

$$X = \frac{\bigl|1-a+t(2a-1)\bigr| + \bigl|1-2a+t(1-a)\bigr|}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Заметим, что при $u, v \geqslant 0$ верно неравенство $u+v \geqslant \sqrt{u^2+v^2}$, причем равенство реализуется только в случаях $u=0$ или $v=0$. Применив это неравенство к числителю X, мы получим

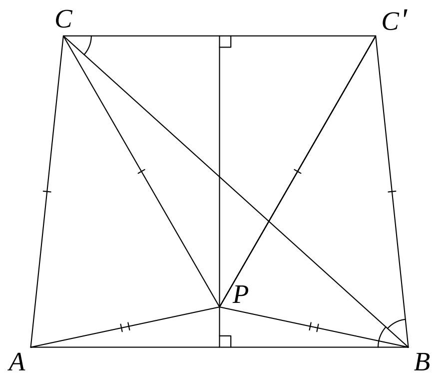
$$X \geqslant \frac{(1-a)^2+t^2(2a-1)^2-2t(1-a)(1-2a)+(1-2a)^2+t^2(1-a)^2+2t(1-a)(1-2a)}{\sqrt{t^2+1}} =$$

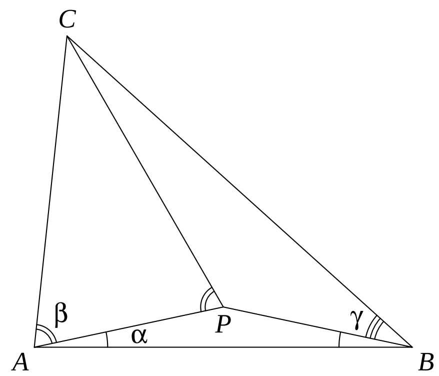
$$= \frac{\sqrt{(t^2+1)\bigl((1-a)^2+(1-2a)^2\bigr)}}{\sqrt{t^2+1}} = \sqrt{5a^2-6a+2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Последнее неравенство становится равенством при $a = \frac{3}{5}$. В этом случае числитель дроби X примет вид $\frac{1}{5}\bigl(|t+2|+|2t-1|\bigr)$. Тогда при $t = \frac{1}{2}$ равенством становится и первое неравенство. Таким образом, значение $\frac{1}{\sqrt{5}}$ для X реализуется. $\square$

3. *Внутри треугольника ABC выбрана такая точка P, что $AP = BP$ и $CP = AC$. Найдите $\angle CBP$, если известно, что $\angle BAC = 2\angle ABC$.*

Ответ: 30°.





Решение 1. Проведем серединный перпендикуляр к стороне AB. Очевидно, что он пройдет через точку P. Пусть C' — точка, симметричная C относительно этого перпендикуляра (см. левый рисунок). В силу симметрии $\angle C'BA = \angle CAB = 2\angle ABC$, откуда $\angle C'BC = \angle ABC$. С другой стороны, прямые CC' и AB параллельны, поэтому $\angle ABC = \angle BCC'$. Стало быть, $\angle BCC' = \angle C'BC$, треугольник $BC'C$ равнобедренный и $BC' = C'C$. Из симметрии $BC' = AC$ и $CP = C'P$, а по условию $AC = CP$. Следовательно,

$$C'P = CP = AC = BC' = C'C,$$

и треугольник PCC' равносторонний. Таким образом, $\angle CC'P = 60^\circ$. Заметим, что

$$180^\circ - 2\angle PBC' = \angle PC'B = \angle BC'C - 60^\circ = 120^\circ - 2\angle CBC'.$$

Поэтому

$$\angle CBP = \angle PBC' - \angle CBC' = \tfrac{1}{2}\,(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ. \quad \square$$

Решение 2. Положим $\alpha = \angle PAB$, $\beta = \angle PAC$, $\gamma = \angle PBC$, $\varphi = \alpha + \gamma$ (см. правый рисунок). По условию $\angle PBA = \alpha$, $\angle CPA = \beta$ и

$$\alpha + \beta = 2\varphi = 2(\alpha+\gamma) \Longleftrightarrow 2\gamma = \beta - \alpha.$$

По теореме синусов
$$\frac{AC}{\sin\varphi} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 3\varphi)} \Longleftrightarrow \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi} = \frac{AB}{AC}.$$
Заметим, что
$$AB = 2AP\cos\alpha = 4AC\cos\alpha\cos\beta \Longleftrightarrow \frac{AB}{AC} = 2\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\beta-\alpha)\big) = 2\cos 2\varphi + 2\cos 2\gamma.$$
Кроме того,
$$\frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi} = 3 - 4\sin^2\varphi = 2\cos 2\varphi + 1.$$
Поэтому
$$2\cos 2\varphi + 2\cos 2\gamma = 2\cos 2\varphi + 1 \Longleftrightarrow \cos 2\gamma = \tfrac{1}{2} \Longleftrightarrow 2\gamma = 60^\circ \Longleftrightarrow \gamma = 30^\circ. \quad \square$$

4. *Решите в натуральных числах уравнение* $2^x + 6^y + 5 = 15^z$.

Ответ: $(2,1,1)$, $(2,3,2)$.

Решение. Правая часть уравнения кратна 3, а левая дает такой же остаток от деления на 3, как $(-1)^x + 2$. Значит, x четно и, в частности, $x \geqslant 2$. Запишем уравнение в виде $2^x + 6^y = 15^z - 5$ и рассмотрим два случая.

1) *z нечетно.* Остаток от деления $15^z - 5$ на 4 такой же, как у $(-1)^z + 3$, то есть он равен 2. Тогда 6^y не делится на 4, откуда $y = 1$ и $2^x = 15^z - 11$. Остаток от деления $15^z - 11$ на 8 такой же, как у $(-1)^z + 5$, то есть он равен 4. Это возможно лишь при $x = 2$. Так как $2^2 + 6^1 + 5 = 15^1$, мы получили решение $(2,1,1)$.

2) *z четно.* Остаток от деления $15^z - 5$ на 16 такой же, как $(-1)^z + 11$, то есть он равен 12. Заметим, что остатки от деления 6^y на 16 принимают только значения 6, 4, 8 и 0, причем ни одно из них не равно 12. Значит, 2^x не может делиться на 16, откуда $x = 2$. Тогда остаток от деления 6^y на 16 должен быть равен 4, что возможно лишь при $y = 2$. Поскольку $2^2 + 6^3 + 5 = 15^2$, мы получили решение $(2,3,2)$. $\square$

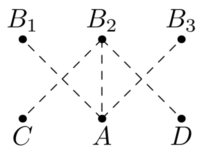
5. *В оздоровительный лагерь приехало 175 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых шестерых школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что все школьники, оказавшиеся в одной комнате, будут знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло приехать в лагерь?*

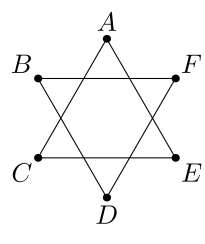
Ответ: 15 050.

Решение. Предположим, что какой-то школьник (назовем его Васей) не знаком хотя бы с четырьмя школьниками. Выберем следующих шестерых детей: Васю, четырех незнакомых ему школьников и еще одного произвольного школьника. Их невозможно расселить по двум комнатам, поскольку из этой шестерки Вася знаком не более чем с одним человеком. Значит, у каждого школьника есть не более трех незнакомых. Рассмотрим два случая.

1) *Каждый школьник не знаком не более чем с двумя детьми.* Тогда любой школьник имеет не менее 172 знакомых, и общее число пар знакомых не меньше, чем $\frac{175\cdot172}{2} = 15\,050$.

2) *Существует школьник, незнакомый с тремя детьми.* Обозначим такого школьника буквой A, а незнакомых ему людей — через B_1, B_2 и B_3. Выберем следующих шестерых детей: A, B_1, B_2, B_3 и еще двоих произвольных школьников C и D. Поскольку их можно расселить по двум трехместным комнатам, A должен оказаться в одной комнате с C и D. Но тогда школьники C и D должны быть знакомы между собой и с A. Таким образом, мы установили, что любые школьники, отличные от B_1, B_2 и B_3, знакомы между собой. В частности, это означает, что любой школьник, отличный от B_1, B_2 и B_3, может не быть знаком лишь с кем-то из B_i. Но каждый из B_i не знаком не более чем с тремя школьниками, поэтому пар незнакомых школьников оказывается не больше девяти. Значит, число пар знакомых школьников не меньше, чем $\frac{175\cdot174}{2} - 9 = 15\,216 > 15\,050$.

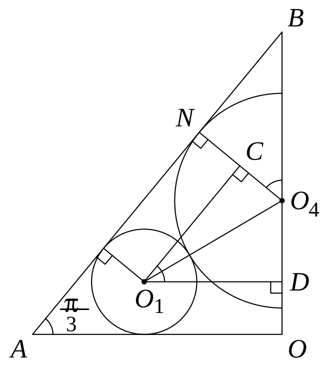




С учетом 1) и 2) осталось показать, что число пар знакомых школьников может быть в точности 15 050. Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом. Проверим, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Поскольку каждый школьник знаком с 172 школьниками, общее количество пар знакомых в точности равно $\frac{175\cdot172}{2} = 15\,050$. Возьмем произвольную шестерку школьников и расселим их по двум комнатам. Удалим всех остальных из-за большого круглого стола и обозначим оставшихся в циклическом порядке через A, B, C, D, E, F. Поселим теперь школьников A, C, E в одну комнату, а B, D, F — в другую. Обитатели каждой комнаты сидят за столом не рядом и, тем более, они сидели не рядом за большим столом. Поэтому они все друг друга знают. $\square$

6. *В конус помещены четыре шара, касающихся друг друга (внешним образом) и боковой поверхности конуса. Три шара имеют радиус 3 и касаются также основания конуса. Найдите радиус четвертого шара, если угол между образующей и основанием конуса равен $\frac{\pi}{3}$.*

Ответ: $9 - 4\sqrt{2}$.



Решение. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры шаров, r — радиус четвертого шара, BO — высота конуса, D — проекция O_1 на BO. На рисунке показана часть сечения конуса плоскостью BOO_1. Заметим, что $DO_1 = 2\sqrt{3}$ как радиус окружности, описанной около правильного треугольника $O_1O_2O_3$ со стороной 6. Кроме того,

$$CO_1 = \sqrt{O_1O_4^2 - CO_4^2} = \sqrt{(r+3)^2 - (r-3)^2} = 2\sqrt{3r}.$$

Так как $\angle BO_4N = \pi - \angle NO_4D = \angle CO_1D = \frac{\pi}{3}$, мы получаем

$$2\sqrt{3r}\cos\frac{\pi}{3} + (r-3)\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

(в левой части стоит сумма проекций отрезков O_1C и O_4C на O_1D, так что эта формула верна и в случае $r < 3$). Тогда

$$\sqrt{3r} + (r-3)\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} = 0 \Longleftrightarrow r + 2\sqrt{r} - 7 = 0 \Longleftrightarrow r = \left(-1 + \sqrt{8}\right)^2 = 9 - 4\sqrt{2}. \quad \square$$

Вариант 6

1. *В квалификационном турнире по армрестлингу участвует 896 спортсменов. За победу дается 1 очко, за поражение — 0 очков. Перед каждым туром пары по жребию составляют из участников, имеющих равное количество очков (тем, кому не нашлось пары, начисляют очко без игры). После второго поражения спортсмен выбывает из турнира. Как только определяется единоличный лидер, турнир заканчивается, а все оставшиеся на нем спортсмены считаются прошедшими отбор. Найдите количество таких спортсменов.*

   Ответ: 10.

   Решение. Заметим, что $896 = 1024 - 128$. Докажем вначале вспомогательное утверждение.

В турнире с 2^n участниками при любом $m \in \{1, \ldots, n\}$ после m-го тура останется 2^{n-m} спортсменов, не имеющих поражений, и $m \cdot 2^{n-m}$ спортсменов с одним поражением. Воспользуемся индукцией по m. Для $m = 1$ все очевидно. Пусть для некоторого $m < n$ утверждение верно. Тогда перед $(m+1)$-м туром на пары разобьются все участники. После тура количество спортсменов, не имеющих поражений, сократится вдвое, то есть станет равным 2^{n-m-1}. По одному поражению станет у тех, кто проиграл в группе лидеров (их 2^{n-m-1} человек), и у тех, кто уже имел одно поражение и выиграл (по индукционному предположению их $m \cdot 2^{n-m-1}$ человек). В сумме мы получим $(m+1) \cdot 2^{n-m-1}$. Остальные участники покинут турнир. Таким образом, индукционный переход завершен.

Пусть параллельно нашему проводится второй квалификационный турнир со 128 участниками по тем же правилам. Мы можем до седьмого тура трактовать эти два турнира как части одного (с 1024 участниками). Будем в каждом туре сводить только спортсменов из своего турнира. Это возможно, так как по доказанному выше число лидеров и участников с одним поражением во втором и общем турнирах будет четным, а тогда и в первом тоже. Будем записывать оставшихся участников в виде пар (a, b), где b — количество лидеров, a — число спортсменов с одним поражением. В силу вспомогательного утверждения после седьмого тура в общем турнире останется $(56, 8)$ участников, а во втором — $(7, 1)$. Значит, в нашем турнире будет $(49, 7)$ спортсменов, а дальше их число меняется так:

$$(49, 7) \to (28, 4) \to (16, 2) \to (9, 1).$$

Таким образом, турнир закончится после десятого тура, и квалификацию пройдут 10 спортсменов. $\square$

2. *Найдите наименьшее значение при $a, b > 0$ выражения*

$$\frac{\bigl|a + 3b - b(a + 9b)\bigr| + \bigl|3b - a + 3b(a - b)\bigr|}{\sqrt{a^2 + 9b^2}}.$$

   Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

   Решение 1. Минимизируемое выражение равно $d_1 + d_2$, где d_1, d_2 — расстояния от точки $A(1, 1)$ до прямых ℓ_1, ℓ_2, задаваемых уравнениями

$$\ell_1 : \ ax + 3by - b(a + 9b) = 0 \quad \text{и} \quad \ell_2 : \ 3bx - ay + 3b(a - b) = 0.$$

Эти прямые перпендикулярны и пересекаются в точке $B(b, 3b)$. Пусть α — угол между прямыми AB и ℓ_1. Тогда $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и

$$d_1 + d_2 = AB \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha) = AB \cdot \sqrt{2}\sin\bigl(\alpha + \tfrac{\pi}{4}\bigr) \geqslant AB = \sqrt{10b^2 - 8b + 2} \geqslant \sqrt{\tfrac{2}{5}}.$$

Второе неравенство становится равенством при $b = \frac{2}{5}$. Если и $a = \frac{2}{5}$, то $A \in \ell_1$ и $\alpha = 0$, поэтому в первом неравенстве также реализуется равенство. $\square$

Решение 2. Пусть $t = \frac{a}{3b}$, X — минимизируемая дробь. Поделив числитель и знаменатель X на $3b$, мы получим

$$X = \frac{\bigl|1 - 3b + t(1 - b)\bigr| + \bigl|1 - b + t(3b - 1)\bigr|}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Заметим, что при $u, v \geqslant 0$ верно неравенство $u + v \geqslant \sqrt{u^2 + v^2}$, причем равенство реализуется только в случаях $u = 0$ или $v = 0$. Применив это неравенство к числителю X, мы получим

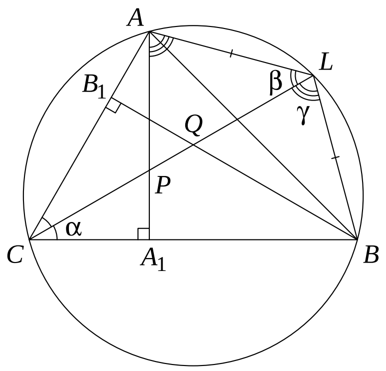
$$X \geqslant \frac{(1-3b)^2 + t^2(1-b)^2 + 2t(1-b)(1-3b) + (1-b)^2 + t^2(3b-1)^2 - 2t(1-b)(1-3b)}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(t^2+1)\big((1-b)^2 + (1-3b)^2\big)}}{\sqrt{t^2+1}} = \sqrt{10b^2 - 8b + 2} \geqslant \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Последнее неравенство становится равенством при $b = \frac{2}{5}$. В этом случае числитель дроби X примет вид $\frac{1}{5}\big(|3t-1| + |t+3|\big)$. Тогда при $t = \frac{1}{3}$ равенством становится и первое неравенство. Таким образом, значение $\sqrt{\frac{2}{5}}$ для X реализуется. $\square$

3. *Дан треугольник ABC с наибольшей стороной BC. Биссектриса его угла C пересекает высоты AA_1 и BB_1 в точках P и Q соответственно, а описанную около ABC окружность — в точке L. Найдите $\angle ACB$, если известно, что $AP = LQ$.*

   Ответ: 60°.



Решение. Пусть $\alpha = \angle BCL$, $\beta = \angle ALC$, $\gamma = \angle BLC$ (см. рисунок). Докажем равенство треугольников ALP и BLQ. Заметим, что $AP = LQ$ по условию и $AL = LB$ как хорды, соответствующие одинаковым углам. Кроме того,

$$\angle APL = \angle A_1PC = 90^\circ - \alpha = \angle B_1QC = \angle BQL.$$

Тогда по теореме синусов

$$\frac{AP}{\sin\angle ALP} = \frac{AL}{\sin\angle APL} = \frac{LB}{\sin\angle BQL} = \frac{LQ}{\sin\angle LBQ}, \quad \text{откуда} \quad \sin\angle ALP = \sin\angle LBQ.$$

Но $\angle ALP = \angle ABC < 90^\circ$ и

$$\angle LBQ = 180^\circ - \angle BLC - \angle BQL = 90^\circ - \angle BAC + \alpha < 90^\circ - \angle BAC + \angle ACB \leqslant 90^\circ$$

(последнее неравенство верно, поскольку $BC \geqslant AB$). Значит, углы ALP и LBQ острые, и они одинаковы ввиду равенства их синусов. Таким образом, треугольники ALP и BLQ равны по стороне и двум углам. Поэтому $\angle LAP = \angle QLB = \gamma$. Теперь из треугольника ALP

$$\beta + \gamma + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Longrightarrow \beta + \gamma = 90^\circ + \alpha,$$

а из четырехугольника $ALBC$

$$\beta + \gamma = 180^\circ - 2\alpha \Longrightarrow 180^\circ - 2\alpha = 90^\circ + \alpha \Longrightarrow \alpha = 30^\circ \Longrightarrow \angle ACB = 60^\circ. \quad \square$$

4. *Решите в натуральных числах уравнение* $2^x + 5^y + 19 = 30^z$.

Ответ: $(8, 4, 2)$.

Решение. Правая часть уравнения кратна 5, а левая дает такой же остаток от деления на 5, как $2^x - 1$. Значит, x кратно 4 и, в частности, $x \geqslant 4$. Кроме того, правая часть кратна 3, а левая дает такой же остаток от деления на 3, как $(-1)^x + (-1)^y + 1 = (-1)^y + 2$. Поэтому y четно, то есть $y = 2n$. Заметим, что

$$2^x + 5^y + 19 = 2^x + 5^{2n} - 1 + 20 = 2^x + \big(5^n - 1\big)\big(5^n + 1\big) + 20.$$

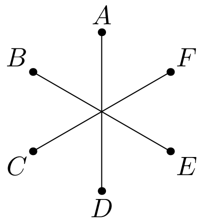
Число $\big(5^n - 1\big)\big(5^n + 1\big)$ кратно 8 как произведение соседних четных чисел. Тогда левая часть уравнения делится на 4, но не делится на 8, и то же самое должно быть верно для 30^z. Значит, $z = 2$ и $2^x + 25^n = 881$. Для n допустимы лишь значения 1 и 2. Нам подойдет только $n = 2$, что дает $y = 4$ и $x = 8$. $\square$

5. *В оздоровительном лагере отдыхают 225 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых шестерых школьников есть три непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло отдыхать в лагере?*

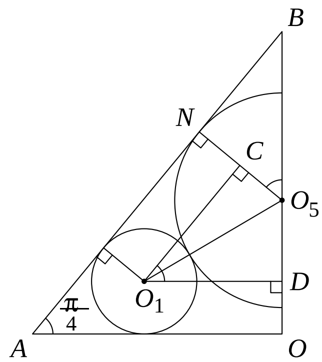
Ответ: 24 750.

Решение. Предположим, что какой-то школьник (назовем его Васей) не знаком хотя бы с пятью школьниками. Тогда Вася и пятеро незнакомых ему школьников образуют шестерку, не удовлетворяющую условию задачи. Таким образом, у каждого школьника может быть не более четырех незнакомых. Поэтому каждый знаком по крайней мере с 220 школьниками, и количество пар знакомых не меньше, чем $\frac{225 \cdot 220}{2} = 24\,750$.

Покажем теперь, что число пар знакомых школьников может быть в точности 24 750. Посадим всех школьников за большой круглый стол и познакомим всех, кроме сидящих рядом и сидящих через одного. Проверим, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Поскольку каждый школьник не знаком ровно с четырьмя школьниками, он знаком в точности с 220 школьниками, и общее количество пар знакомых равно $\frac{225 \cdot 220}{2} = 24\,750$.



Рассмотрим теперь произвольную шестерку школьников. Оставим только их за большим круглым столом. Заметим, что каждый из них знаком с сидящим “напротив” него (то есть с сидящим через двух от него), поскольку за большим столом он не мог быть ни его соседом, ни сидящим через одного от него. Итак, мы выбрали три непересекающиеся пары знакомых школьников. $\square$



6. *В конус, у которого высота и радиус основания равны 7, помещены четыре одинаковых шара. Каждый из них касается двух других (внешним образом), основания и боковой поверхности конуса. Пятый*

шара касается боковой поверхности конуса и всех одинаковых шаров (внешним образом). Найдите радиус пятого шара.

Ответ: $2\sqrt{2}-1$.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 — центры шаров, r и x — радиусы первого и пятого шаров соответственно, BO — высота конуса, D — проекция O_1 на BO. На рисунке показана часть сечения конуса плоскостью BOO_1. Заметим, что $DO_1 = r\sqrt{2}$ как половина диагонали квадрата $O_1O_2O_3O_4$ со стороной $2r$. Кроме того,

$$CO_1 = \sqrt{O_1O_5^2 - CO_5^2} = \sqrt{(x+r)^2-(x-r)^2} = 2\sqrt{xr}.$$

Так как $\angle OAB = \frac{\pi}{4}$, мы получаем $\angle BO_5N = \pi - \angle NO_5D = \angle CO_1D = \frac{\pi}{4}$ и

$$2\sqrt{xr}\cos\tfrac{\pi}{4} + (x-r)\sin\tfrac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$$

(в левой части стоит сумма проекций отрезков O_1C и O_5C на O_1D, так что эта формула верна и в случае $x<r$). Положим $t=\sqrt{\frac{x}{r}}$. Тогда $t^2+2t-3=0$, откуда $t=1$ и $x=r$. Осталось заметить, что

$$7 = AO = DO_1 + r\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{8} = r\sqrt{2} + r\cdot\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = r\big(2\sqrt{2}+1\big) \Longrightarrow r = \frac{7}{2\sqrt{2}+1} = 2\sqrt{2}-1. \quad \square$$

Вариант 7

1. *В теннисном турнире участвуют 512 школьников. За победу дается 1 очко, за поражение — 0 очков. Перед каждым туром пары по жребию составляют из участников, имеющих равное количество очков (тем, кому не нашлось пары, начисляют очко без игры). Турнир заканчивается, как только определяется единоличный лидер. Сколько школьников завершит турнир с 6 очками?*

Ответ: 84.

Решение. Покажем, что в турнире с 2^n участниками никто не получит очков без игры и для любого $k \in \{0, \dots, n\}$ по k очков наберут в итоге C_n^k участников. Воспользуемся индукцией по n. Для $n = 1$ это очевидно. Пусть для некоторого n оба утверждения верны. Тогда в турнире с 2^{n+1} участниками после первого тура по 2^n школьников наберут 0 очков и 1 очко. Будем в дальнейшем проводить жеребьевку так, чтобы участники из этих групп встречались только друг с другом. По индукционному предположению это всегда можно сделать, и на распределение баллов такое допущение, очевидно, не повлияет. Иными словами, далее мы проводим два независимых турнира с 2^n участниками. По индукционному предположению в первом турнире по k очков наберут C_n^k школьников, а во втором — C_n^{k-1} школьников, поскольку на старте все участники имели по очку. В итоге по k очков наберут $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ школьников (мы воспользовались основным тождеством треугольника Паскаля). Таким образом, индукционный переход завершен. Осталось заметить, что $C_9^6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$. $\square$

2. *Найдите наименьшее значение при $a, b > 0$ выражения*

$$\frac{\big(2a + 2ab - b(b+1)\big)^2 + \big(b - 4a^2 + 2a(b+1)\big)^2}{4a^2 + b^2}.$$

Ответ: 1.

Решение 1. Минимизируемое выражение есть сумма квадратов расстояний от точки $A(1, 2a)$ до прямых ℓ_1 и ℓ_2, задаваемых уравнениями

$$\ell_1 : \; 2ax + by - b(b+1) = 0 \quad \text{и} \quad \ell_2 : \; bx - 2ay + 2a(b+1) = 0.$$

Эти прямые перпендикулярны и пересекаются в точке $B(0, b+1)$. Тогда в силу теоремы Пифагора нам нужно найти минимум $AB^2 = 1 + (b+1-2a)^2$, который равен 1 и реализуется, например, при $a = b = 1$. $\square$

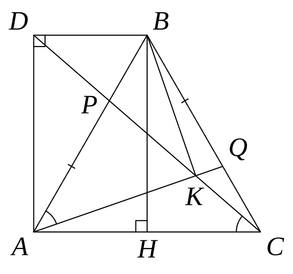
Решение 2. Преобразуем числитель дроби:

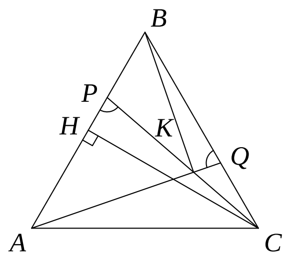
$$\begin{aligned}
&\big(2a + 2ab - b(b+1)\big)^2 + \big(b - 4a^2 + 2a(b+1)\big)^2 = \\
&\qquad = 4a^2 + 4a^2b^2 + b^2(b+1)^2 + 8a^2b - 4ab(b+1) - 4ab^2(b+1) + \\
&\qquad + b^2 + 16a^4 + 4a^2(b+1)^2 - 8a^2b + 4ab(b+1) - 16a^3(b+1) = \\
&\qquad\quad = \big(4a^2 + b^2\big)\big(1 + 4a^2 + (b+1)^2 - 4a(b+1)\big) = \big(4a^2 + b^2\big)\big(1 + (b+1-2a)^2\big).
\end{aligned}$$

Таким образом, необходимо найти минимум функции $(b + 1 - 2a)^2 + 1$ при положительных a и b. Он равен 1 и реализуется, например, при $a = b = 1$. $\square$

3. *На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC выбраны такие точки P и Q, что $AP : PB = BQ : QC = 2 : 1$. Найдите $\angle AKB$, где K — точка пересечения отрезков AQ и CP.*

Ответ: 90°.





Решение 1. Пусть BH — высота и медиана треугольника ABC. Проведем через вершину B параллельно AC прямую и обозначим точку ее пересечения с прямой CP через D (см. левый рисунок). Треугольники BPD и APC подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$, откуда $DB = \frac{1}{2}AC = AH$. Поэтому $ADBH$ — прямоугольник, то есть $\angle ADB = 90°$. Заметим, что треугольники ABQ и CAP равны по двум сторонам и углу. Тогда

$$\angle BDK = \angle DCA = \angle BAK.$$

Значит, четырехугольник $ADBK$ — вписанный, откуда $\angle AKB = 180° - \angle ADB = 90°$. $\square$

Решение 2. Проведем в треугольнике ABC высоту CH (см. правый рисунок). Так как $BH = \frac{1}{2}AB$, мы получим $\frac{BP}{BH} = \frac{2}{3} = \frac{BQ}{BC}$. Поэтому треугольники BPQ и BHC подобны, откуда $\angle BPQ = \angle BHC = 90°$. Заметим теперь, что $BQ = AP$, $AB = CA$ и $\angle ABQ = \angle CAP = 60°$. Тогда треугольники ABQ и CAP равны по двум сторонам и углу. Поскольку $\angle AQB = \angle CPA = 180° - \angle CPB$, четырехугольник $BPKQ$ вписанный, откуда

$$\angle AKB = 180° - \angle BKQ = 180° - \angle BPQ = 90°. \quad \square$$

4. *Решите в натуральных числах уравнение* $2^x + 3^y + 1 = 6^z$.

Ответ: $(1,1,1)$, $(3,3,2)$, $(5,1,2)$.

Решение. Правая часть уравнения кратна 3, а левая дает такой же остаток от деления на 3, как $(-1)^x + 1$. Значит, x нечетно. Рассмотрим две возможных ситуации.

1) $x = 1$. Заметим, что либо $y = z = 1$, либо $y \geqslant 2$ и $z \geqslant 2$. Первый случай удовлетворяет уравнению: $2^1 + 3^1 + 1 = 6^1$, а второй невозможен, поскольку правая часть делится на 9, а левая — нет.

2) $x \geqslant 3$. Заметим, что $6^z \geqslant 2^3 + 3 + 1 = 12$, откуда $z \geqslant 2$. Тогда 2^x и 6^z кратны 4, а 3^y дает при делении на 4 такой же остаток, как $(-1)^y$. Поэтому y нечетно, то есть $y = 2n+1$. Левая часть уравнения не делится на 8, поскольку

$$2^x + 3^y + 1 = 2^x + 3^{2n+1} - 3 + 4 = 2^x + 3\,(3^n - 1)(3^n + 1) + 4,$$

а $(3^n - 1)(3^n + 1)$ кратно 8 как произведение соседних четных чисел. Тогда и 6^z не делится на 8, что возможно лишь при $z = 2$. Осталось решить уравнение $2^x + 3^y = 35$. Для x допустимы лишь значения 3 и 5, и им соответствуют $y = 3$ и $y = 1$. $\square$

5. *Правительство приняло решение приватизировать гражданскую авиацию. Для каждых двух из 202 городов страны соединяющая их авиалиния продается одной из частных авиакомпаний. Обязательное условие продажи таково: каждая авиакомпания должна обеспечить возможность перелета из любого города в любой другой (возможно, с несколькими пересадками). Какое наибольшее количество компаний может купить авиалинии?*

Ответ: 101.

Решение. Докажем вначале, что при $k \in \{1, \ldots, 100\}$ остатки от деления чисел

$$0,\ k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots,\ 99k,\ 100k$$

на простое число 101 различны. Действительно, если для некоторых $0 \leqslant a < b \leqslant 100$ числа ak и bk дают одинаковые остатки от деления на 101, то число $bk - ak = (b-a)k$ делится на 101, что невозможно, ибо $1 \leqslant k \leqslant 100$ и $0 < b - a < 101$. Рассмотрим теперь числовое семейство

$$\mathcal{P}_k: \quad 0,\ k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots,\ 99k,\ 100k,\ 100k+101,\ 99k+101,\ \ldots,\ 3k+101,\ 2k+101,\ k+101,\ 101.$$

Заметим, что все остатки от деления на 202 чисел из $\mathcal{P}_k$ различны. Действительно, если два различных числа из $\mathcal{P}_k$ дают одинаковые остатки от деления на 202, то они дают одинаковые остатки и от деления на 101. Тогда это числа вида ak и $ak + 101$, что невозможно, так как у них разная четность. Поскольку $\mathcal{P}_k$ содержит ровно 202 числа, их остатки принимают всевозможные значения от 0 до 201.

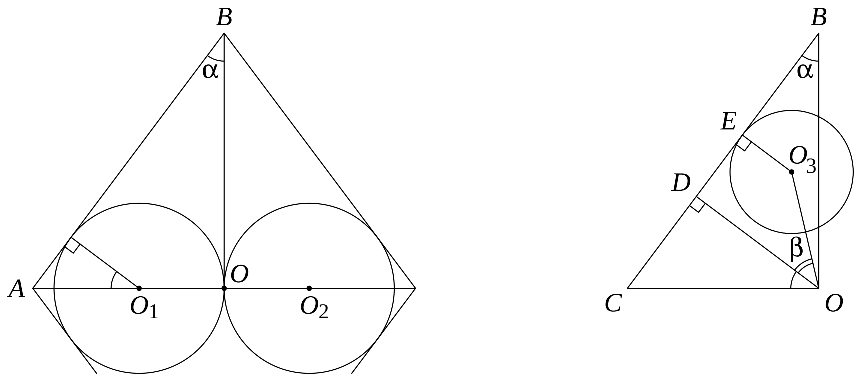
Перейдем теперь к решению задачи. Так как каждая авиакомпания обязана своими силами обеспечить сообщение между всеми городами, у нее должно быть не менее 201 авиалинии. Общее число авиалиний равно $\frac{202 \cdot 201}{2}$, поэтому количество авиакомпаний не превосходит 101.

Покажем теперь, что число авиакомпаний, участвующих в приватизации авиалиний, может быть в точности 101. Договоримся символом $\langle a\rangle$ обозначать остаток от деления целого числа a на 202. Занумеруем города числами от 0 до 201. При любом $k = 1,\ldots,100$ выделим k-й авиакомпании авиалинии, соединяющие города с номерами $\langle a\rangle$ и $\langle b\rangle$, где a и b — соседние числа из семейства $\mathcal{P}_k$. Поскольку остатки чисел из $\mathcal{P}_k$ пробегают (в определенном порядке) все значения от 0 до 201, авиакомпания своими силами сможет обеспечить перелет из любого города в любой другой. Отметим также, что ни одна авиалиния не достанется двум компаниям сразу. Действительно, пусть k и m — различные числа от 1 до 100, (a,b) и (c,d) — пары соседних чисел из семейств $\mathcal{P}_k$ и $\mathcal{P}_m$ соответственно, причем $\{\langle a\rangle,\langle b\rangle\} = \{\langle c\rangle,\langle d\rangle\}$. Тогда по доказанному выше $\{a,b\} = \{c,d\}$, что невозможно, поскольку $b-a = k \neq m = d-c$.

Все авиалинии, оставшиеся от первых ста авиакомпаний, продадим 101-й авиакомпании. Докажем, что и она сможет обеспечить перелет из любого города в любой другой. Очевидно, что ей принадлежит авиалиния $(0,101)$, поскольку 0 и 101 не соседствуют в семействе $\mathcal{P}_k$ ни при каком k. Покажем теперь, что при любом $m \in \{1,\ldots,100\}$ авиалинии $(0, 202-m)$ и $(101, 101-m)$ также принадлежат 101-й компании. Действительно, пусть линия $(0, 202-m)$ принадлежит компании с номером $k \leqslant 100$. Тогда $202-m = k$, что невозможно, поскольку $k+m \leqslant 200$. Второе утверждение проверяется аналогично. Таким образом, 101-я авиакомпания соединяет любые два города транзитом через города 0 и 101. $\square$

6. *Область ограничена двумя конусами с общим основанием, высота которых равна 4, а радиус основания равен 3. В область помещены три шара, касающихся друг друга внешним образом. Два шара одинаковы и касаются обоих конусов, а третий касается границы области. Каков минимальный радиус третьего шара?*

Ответ: $\frac{27}{35}$.



Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, BO — высота одного из конусов, r и x — радиусы первых двух и третьего шаров соответственно, α — угол между образующей и высотой конусов. На левом рисунке показана часть сечения области плоскостью BOO_1, на правом — часть сечения плоскостью BOO_3. По условию $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Из левого рисунка ясно, что

$$3 = AO = AO_1 + O_1O = r\left(\tfrac{1}{\cos\alpha} + 1\right) = \tfrac{9}{4}r, \quad \text{то есть} \quad r = \tfrac{4}{3}.$$

Пусть на правом рисунке OD — перпендикуляр на образующую BC конуса, β — угол между OD и OO_3. Заметим, что OO_3 — высота равнобедренного треугольника $O_1O_2O_3$ с боковой стороной $r+x$ и основанием $2r$, откуда $OO_3 = \sqrt{(x+r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2+2rx}$. Тогда

$$CO\cdot\cos\alpha = OD = OO_3\cdot\cos\beta + O_3E \iff \tfrac{12}{5} = \cos\beta\,\sqrt{x^2+2rx} + x \iff \cos\beta = \frac{\frac{12}{5}-x}{\sqrt{x^2+\frac{8}{3}x}}.$$

Правая часть последнего равенства убывает с ростом x, поэтому минимальное значение x реализуется при максимальном $\cos\beta$, то есть при $\beta = 0$. В этом случае $x \leqslant \frac{12}{5}$ и

$$\sqrt{x^2+\tfrac{8}{3}x} = \tfrac{12}{5} - x \iff \tfrac{8}{3}x = \tfrac{144}{25} - \tfrac{24}{5}x \iff x = \tfrac{27}{35}. \quad \square$$

Вариант 8

1. *В турнире по армрестлингу участвует 2^n спортсменов, где n — натуральное число, бо́льшее 7. За победу дается 1 очко, за поражение — 0 очков. Перед каждым туром пары по жребию составляют из участников, имеющих равное количество очков (тем, кому не нашлось пары, просто начисляют очко). После седьмого тура оказалось, что ровно 42 участника набрали по 5 очков. Чему равно n?*

Ответ: 8.

Решение. Пусть $f(m,k)$ — число участников, набравших после m туров k очков. Проверим индукцией по m, что
$$f(m,k) = 2^{n-m} \cdot C_m^k, \quad \text{где } 0 \leqslant k \leqslant m \leqslant 2^n.$$
Если $m = 0$, то и $k = 0$, а $f(0,0) = 2^n$. Проведем индукционный переход. Пусть для некоторого $m < n$ требуемое равенство верно. Тогда каждая группа с одинаковым количеством очков содержит четное число участников, поэтому на пары разобьются все участники. После $(m+1)$-го тура группы спортсменов, не имеющих побед и не имеющих поражений, сократятся вдвое. Поэтому
$$f(m+1,0) = \tfrac{1}{2}f(m,0) = \tfrac{1}{2}\cdot 2^{n-m} = 2^{n-(m+1)} \cdot C_{m+1}^0 \quad \text{и} \quad f(m+1,m+1) = \tfrac{1}{2}f(m,m) = 2^{n-(m+1)} \cdot C_{m+1}^{m+1}.$$
Пусть теперь $k \in \{1,\ldots,m\}$. После $(m+1)$-го тура по k очков станет у тех, кто имел k очков и проиграл, а также у тех, кто имел $k-1$ очко и выиграл. Поэтому
$$f(m+1,k) = \tfrac{1}{2}\cdot f(m,k) + \tfrac{1}{2}\cdot f(m,k-1) = 2^{n-m-1}\left(C_m^k + C_m^{k-1}\right) = 2^{n-(m+1)} \cdot C_{m+1}^k$$
(в последнем переходе мы воспользовались основным тождеством треугольника Паскаля). Таким образом, индукционный переход завершен. Осталось заметить, что
$$42 = f(7,5) = 2^{n-7}\cdot C_7^5 = 2^{n-7}\cdot\tfrac{7\cdot 6}{2} = 42\cdot 2^{n-8}, \quad \text{то есть } n = 8. \quad \square$$

2. *Найдите наименьшее значение при $a, b > 0$ выражения*
$$\frac{\big(3ab - 6b + a(1-a)\big)^2 + \big(9b^2 + 2a + 3b(1-a)\big)^2}{a^2 + 9b^2}.$$

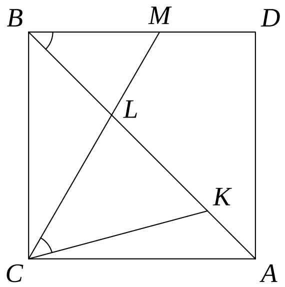
Ответ: 4.

Решение 1. Минимизируемое выражение есть сумма квадратов расстояний от точки $A(3b,-2)$ до прямых ℓ_1 и ℓ_2, задаваемых уравнениями
$$\ell_1 :\ ax + 3by + a(1-a) = 0 \quad \text{и} \quad \ell_2 :\ 3bx - ay + 3b(1-a) = 0.$$
Эти прямые перпендикулярны и пересекаются в точке $B(a-1,0)$. Тогда в силу теоремы Пифагора нам нужно найти минимум $AB^2 = (a-1-3b)^2 + 4$, который равен 4 и реализуется, например, при $a = 4$ и $b = 1$. $\square$

Решение 2. Преобразуем числитель дроби:
$$\begin{aligned}
&\big(3ab - 6b + a(1-a)\big)^2 + \big(9b^2 + 2a + 3b(1-a)\big)^2 = \\
&\qquad = 36b^2 + 9a^2b^2 + a^2(1-a)^2 - 36ab^2 - 12ab(1-a) + 6a^2b(1-a) + \\
&\qquad + 4a^2 + 81b^4 + 9b^2(1-a)^2 + 36ab^2 + 12ab(1-a) + 54b^3(1-a) = \\
&\qquad\qquad = \big(a^2 + 9b^2\big)\big(4 + 9b^2 + (1-a)^2 + 6b(1-a)\big) = \big(a^2 + 9b^2\big)\big(4 + (1-a+3b)^2\big).
\end{aligned}$$
Таким образом, необходимо найти минимум функции $(1-a+3b)^2 + 1$ при положительных a и b. Он равен 4 и реализуется, например, при $a = 4$ и $b = 1$. $\square$

3. *На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены такие K и L, что $AK : KL : LB = 1 : 2 : \sqrt{3}$. Найдите $\angle KCL$.*

Ответ: 45°.



Решение 1. Пусть $AK = 1$. Тогда $KL = 2$ и $LB = \sqrt{3}$, откуда $AB = 3 + \sqrt{3}$ и $AC = BC = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Тогда

$$AC \cdot BC = 6 + 3\sqrt{3} = 3\,(2 + \sqrt{3}) = AL \cdot KB, \quad \text{или} \quad \frac{KB}{BC} = \frac{CA}{AL}.$$

Так как $\angle KBC = 45^\circ = \angle CAL$, треугольники CBK и LAC подобны. Поэтому $\angle BCK = \angle ALC$ и

$$\angle ALC = \angle BCL + \angle LBC = \angle BCL + 45^\circ = \angle BCK - \angle KCL + 45^\circ = \angle ALC - \angle KCL + 45^\circ,$$

откуда $\angle KCL = 45^\circ$. $\square$

Решение 2. Достроим треугольник ABC до квадрата $ABCD$, и пусть M — точка пересечения прямых BD и CL (см. рисунок). Положим $a = AC$. Треугольники ALC и BLM подобны с коэффициентом $\sqrt{3}$. Поэтому

$$BM = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad CM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \quad \frac{AB}{CM} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Кроме того,

$$BL = \frac{AB}{\sqrt{3}+1}, \quad CL = \frac{CM \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}, \quad \frac{CL}{BL} = \sqrt{3} \cdot \frac{CM}{AB} = \sqrt{2},$$

а также

$$KL = \frac{2AB}{\sqrt{3}+3}, \quad ML = \frac{CM}{\sqrt{3}+1}, \quad \frac{KL}{ML} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{AB}{CM} = \sqrt{2}.$$

Таким образом, $\frac{CL}{BL} = \frac{KL}{ML}$, и треугольники BLM и CLK подобны. Тогда $\angle KCL = \angle MBL = 45^\circ$. $\square$

4. *Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 3^y + 3 = 10^z$.*

Ответ: $(2, 1, 1)$, $(4, 4, 2)$.

Решение. Левая часть уравнения при делении на 3 дает такой же остаток, как $(-1)^x$, а остаток правой части при любом z равен 1. Значит, x четно и, в частности, $x \geqslant 2$. Если $z = 1$, то уравнению удовлетворяют $x = 2$, $y = 1$ и только они. Пусть $z \geqslant 2$. Тогда правая часть уравнения кратна 4, а левая при делении на 4 дает такой же остаток, как $(-1)^y + 3$. Значит, y четно, то есть $y = 2n$. Рассмотрим два случая.

1) $z = 2$. Мы получим $2^x + 9^n = 97$. Для n допустимы лишь значения 1 и 2. Нам подойдет только $n = 2$, что дает $y = 4$ и $x = 4$.

2) $z \geqslant 3$. Тогда правая часть уравнения кратна 8, а левая равна

$$2^x + 3^{2n} - 1 + 4 = 2^x + \big(3^n - 1\big)\big(3^n + 1\big) + 4.$$

Заметим, что $\big(3^n - 1\big)\big(3^n + 1\big)$ кратно 8 как произведение соседних четных чисел. Значит, 2^x не может делиться на 8, откуда $x = 2$. Таким образом, $9^n + 7 = 10^z$. Но это невозможно, поскольку остаток от деления на 9 правой части при любом z равен 1, а остаток левой части равен 7. $\square$

5. *Правительство приняло решение приватизировать гражданскую авиацию. Для каждых двух из 127 городов страны соединяющая их авиалиния продается одной из частных авиакомпаний. Каждая авиакомпания должна сделать все приобретенные авиалинии односторонними, но таким образом, чтобы обеспечить возможность перелета из любого города в любой другой (возможно, с несколькими пересадками). Какое наибольшее количество компаний может купить авиалинии?*

Ответ: 63.

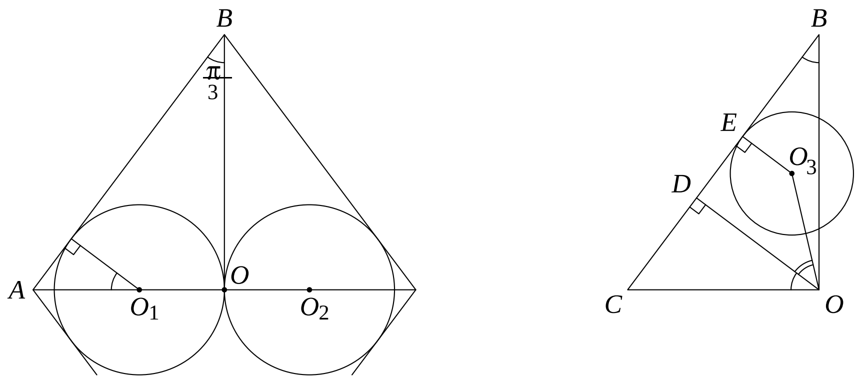
Решение. Для целых k и n обозначим через $N_{k,n}$ остаток от деления $k \cdot n$ на простое число 127. Докажем вначале, что если k не делится на 127, то числа $N_{k,0}, \ldots, N_{k,126}$ различны. Действительно, если для некоторых $0 \leqslant a < b \leqslant 126$ числа ak и bk дают одинаковые остатки от деления на 127, то число $bk - ak = (b-a)k$ делится на 127, что невозможно, так как $0 < b - a < 127$. Поэтому числа $N_{k,0}, \ldots, N_{k,126}$ пробегают все значения от 0 до 126, а $N_{k,127}$ равно нулю.

Перейдем теперь к решению задачи. Возьмем произвольную авиакомпанию, участвующую в приватизации. Поскольку она обязана своими силами обеспечить сообщение между всеми городами, для любого города у нее должна быть авиалиния, ведущая в этот город, и авиалиния, выводящая из него. Таким образом, с каждым городом должны быть связаны хотя бы две авиалинии, принадлежащие этой компании. Но тогда всего у компании должно быть не менее 127 авиалиний. Общее количество авиалиний равно $\frac{127 \cdot 126}{2} = 127 \cdot 63$, поэтому число авиакомпаний не превосходит 63.

Покажем теперь, что в приватизации могли участвовать в точности 63 авиакомпании. Занумеруем города числами от 0 до 126. Для любого $k = 1, \ldots, 63$ выделим k-й авиакомпании авиалинии, ведущие из города с номером $N_{k,n}$ в город с номером $N_{k,n+1}$, где $n \in \{0, \ldots, 126\}$. По доказанному выше такие авиалинии, начинаясь и заканчиваясь в городе 0, циклически проходят (в определенном порядке) все остальные города. Таким образом, k-я авиакомпания сможет обеспечить перелет из любого города в любой другой. Осталось проверить, что ни одна авиалиния не достанется двум компаниям сразу. Действительно, пусть $k, m \in \{1, \ldots, 63\}$ и некоторая авиалиния досталась k-й и m-й компаниям. Тогда найдутся такие $i, j \in \{1, \ldots, 126\}$, что $N_{k,i} = N_{m,j}$ и $N_{k,i+1} = N_{m,j+1}$. Мы получим $N_{k,i+1} - N_{k,i} = N_{m,j+1} - N_{m,j}$, то есть $k = m$. $\square$

6. *Область ограничена двумя конусами с общим основанием, высота которых вдвое меньше образующей. В область помещены три шара, касающихся друг друга внешним образом. Два шара одинаковы и касаются обоих конусов, а третий касается границы области. Каково максимальное отношение радиуса третьего шара к радиусу первого?*

Ответ: $\frac{7-\sqrt{22}}{3}$.



Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров, BO — высота одного из конусов, R — радиус основания конусов, r и x — радиусы первых двух и третьего шаров соответственно, $t = \frac{x}{r}$. На левом рисунке показана часть сечения области плоскостью BOO_1, на правом — часть сечения плоскостью BOO_3. Из левого рисунка ясно, что

$$R = AO = AO_1 + O_1O = r\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} + 1\right) = 3r.$$

Пусть на правом рисунке OD — перпендикуляр на образующую BC конуса, α — угол между OD и OO_3. Заметим, что OO_3 — высота равнобедренного треугольника $O_1O_2O_3$ с боковой стороной $r + x$ и основанием $2r$, откуда $OO_3 = \sqrt{(x+r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 + 2rx}$. Тогда

$$R\cos\tfrac{\pi}{3} = OD = O_3E + OO_3 \cdot \cos\alpha \iff \tfrac{3}{2}r = x + \cos\alpha\,\sqrt{x^2+2rx} \iff 2\cos\alpha = \frac{3r-2x}{\sqrt{x^2+2rx}} = \frac{3-2t}{\sqrt{t^2+2t}}.$$

Правая часть последнего равенства убывает с ростом t. Поэтому максимальное значение t реализуется при минимальном $\cos\alpha$, то есть при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (это соответствует случаю, когда центр третьего шара лежит на общем основании конусов). С учетом условия $t \leqslant \frac{3}{2}$ мы получим

$$\sqrt{t^2+2t} = 3-2t \iff t^2+2t = 4t^2 - 12t + 9 \iff 3t^2 - 14t + 9 = 0 \iff t = \tfrac{7-\sqrt{22}}{3}. \quad \square$$