

Заключительный этап 7 и 8 класса (приведен один из вариантов заданий)

1. Системы счисления (2 балл)

[Зазеркальная арифметика]

Условие:

Пусть $XY\bar{Y}$, $\bar{Y}YX$, ZXZ – целые положительные числа в семеричной системе счисления. Буквами X, Y, Z обозначены отличные от нуля неизвестные цифры этих чисел, причем одинаковым буквам соответствует одна и та же цифра, а различным буквам – различные цифры. Известно, что $X > Y$ и $XY\bar{Y} - \bar{Y}YX = ZXZ$. Найдите эти цифры.

В ответе запишите, без пробелов и запятых, сначала цифру, соответствующую X , затем цифру соответствующую Y и в конце цифру соответствующую Z .

Ответ: 623

Решение:

Запишем вычитание чисел в столбик:

$$\begin{array}{r} X Y \bar{Y} \\ - \bar{Y} Y X \\ \hline Z X Z \end{array}$$

Известно, что X, Y и Z больше нуля, при этом $X > Y$, тогда для вычитаний большего числа из меньшего в младшем разряде, нам необходимо занять единицу во втором разряде, причем эта единица дает нам значение равное основанию системы счисления которое необходимо добавить к значению младшего разряда вычитаемого.

При этом во втором разряде, у вычитаемого значение станет на единицу меньше, что так же потребует занимать единицу, уже в старшем разряде.

Это позволяет нам составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 7 + Y - X = Z \\ 7 + (Y - 1) - Y = X \\ (X - 1) - Y = Z \end{cases}$$

Из второго уравнения сразу получаем значение $X = 6$. Подставим его в первое и третье уравнение:

$$\begin{cases} 7 + Y - 6 = Z \\ (6 - 1) - Y = Z \end{cases}$$

Подставим Z из одного выражения в другое:

$$7 + Y - 6 = (6 - 1) - Y$$

Получим $Y = 2$, легко получить и значение $Z = 3$.

Запишем корректно ответ: 623.

2. Измерение объема информации (2 балла)

[Кадрирование]

Условие:

Растровое изображение имеет отношение количества пикселей по вертикали к количеству пикселей по горизонтали как 4 к 3. Цветовая палитра изображения состоит из 65536 цветов. Изображение записывается в память без сжатия так, что хранятся только коды цветов каждого пикселя, причем для их записи используется минимально возможное одинаковое количество бит. Почтальон Печкин кадировал (обрезал) изображение до квадрата со стороной, равной количеству пикселей по горизонтали в исходном изображении и обнаружил, что кадированное изображение занимает на 384 КБайт меньше памяти. Определите, какое количество пикселей по вертикали было в исходном изображении. В ответе укажите целое число.

Примечание: 1 КБайт = 2^{10} байт.

Ответ: 1024

Решение:

Обозначим количество пикселей по горизонтали за X , а количество пикселей по вертикали за Y . Обрезанная область будет иметь размер X на $(Y-X)$ пикселей. Поскольку цвет каждого пикселя выбирается из палитры из 65536 цветов, минимальное одинаковое количество бит, необходимое на хранение каждого символа равно $\log_2(65536)=16$ бит. Следовательно, обрезанная часть изображения будет занимать информационный объем, равный $X*(Y-X)*16$ бит. Значит $X*(Y-X)*16=384*1024*8$. При этом $3*Y=4*X$. Выразим X через Y и подставим в первое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{3*Y}{4} * \left(Y - \frac{3*Y}{4}\right) * 16 &= 384 * 1024 * 8 \\ \frac{3*Y^2}{4} * \left(1 - \frac{3}{4}\right) * 16 &= 384 * 1024 * 8 \\ \frac{3*Y^2}{4} * \frac{1}{4} * 16 &= 384 * 1024 * 8 \\ 3*Y^2 &= 384 * 1024 * 8 \\ Y^2 &= 2^{20} \end{aligned}$$





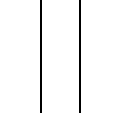


Таким образом, получаем $Y = 1024$.



3. Кодирование текстовой и графической информации (1 балл)



[Цветные кружочки]

Условие:

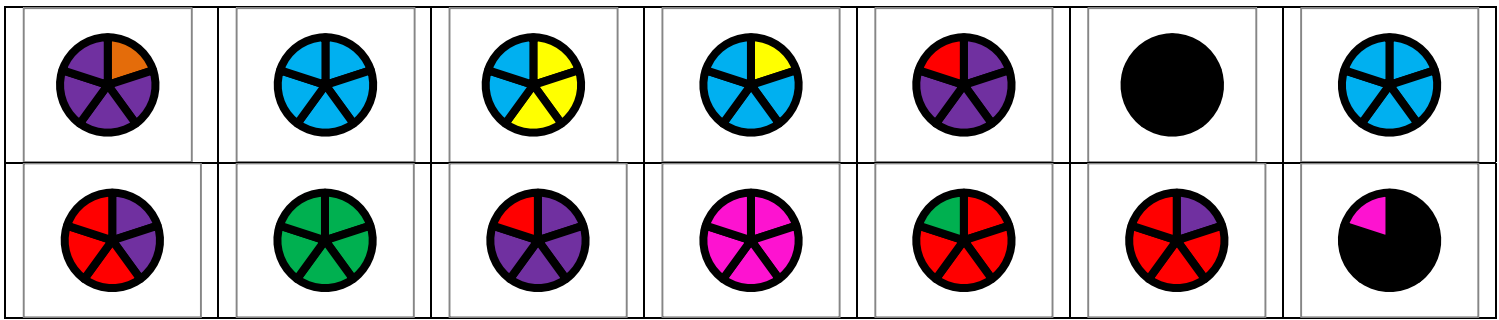
Почтальон Печкин заинтересовался способами кодирования. Одним из простых способов кодирования является замена одного символа другим или комбинацией символов. Печкин решил кодировать символы текста кружочками, разделенными на несколько секторов одинакового размера, но возможно разного цвета. Печкин составил полную таблицу символов, а Матроскину с Галченком передал кодированное сообщение и часть таблицы, приведенную ниже. Известно, что коды двух соседних символов отличаются цветом только одного сектора. Также известно, что после появления в коде очередного символа сектора, такого цвета, который не использовался для предыдущих символов, в коде каждого последующего символа появляется еще один сектор такого же цвета, прилежащий к предыдущему по часовой стрелке пока все сектора не заполнятся этим цветом.

Символ	пробел	а	б	в	г	д	е	ё	ж	з	и	й
Вид символа												

Символ	к	л	м	н	о	п	р	с	т	у	ф	х
Номер символа												

Символ	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я	Точка	Запятая
Номер символа												

Помогите Матроскину понять, что написал Печкин, если сообщение выглядело следующим образом:



В ответе напишите фразу, включая пробелы и знаки препинания.

Ответ: у вас, письмо.

Решение:

Для решения задачи, согласно описанному правилу построения кодов и известным кодам построим полную таблицу соответствия кодов символам используемым в сообщениях:

Символ	<i>пробел</i>	<i>а</i>	<i>б</i>	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>
<i>Вид символа</i>						
Символ	<i>е</i>	<i>ё</i>	<i>ж</i>	<i>з</i>	<i>и</i>	<i>й</i>
<i>Вид символа</i>						
Символ	<i>к</i>	<i>л</i>	<i>м</i>	<i>н</i>	<i>о</i>	<i>п</i>
<i>Вид символа</i>						
Символ	<i>р</i>	<i>с</i>	<i>т</i>	<i>у</i>	<i>ф</i>	<i>х</i>
<i>Вид символа</i>						
Символ	<i>ц</i>	<i>ч</i>	<i>ш</i>	<i>щ</i>	<i>ъ</i>	<i>ы</i>
<i>Вид символа</i>						
Символ	<i>ь</i>	<i>э</i>	<i>ю</i>	<i>я</i>	<i>Точка</i>	<i>Запятая</i>
<i>Вид символа</i>						

Работая по данной таблице можно расшифровать принятое сообщение.

4. Основы комбинаторики (3 баллов)

[Сигнальные флаги]

Условие:

Дядя Федор нашел на чердаке набор сигнальных флагов, каждого вида флага в наборе была ровно одна штука. Дядя Федор разделил флаги между собой и Шариком, так что у Шарика оказалось ровно на один флаг больше. Затем он предложил посчитать, сколько различных «слов» из пяти своих флагов каждый из них сможет составить. Будем считать «слова» различными, если они отличаются составом флагов или порядком их следования в «слове». Они сравнили полученные результаты и выяснили, что Шарик может составить ровно в два раза больше «слов». Определите, сколько всего флагов нашел Дядя Федор на чердаке.

В ответе укажите целое число.

Ответ: 19

Решение:

Дядя Федор и Шарик составляют «слова» из пяти флагов. Пусть у Шарика X флагов, тогда он может составить «слова» используя X флагов на первом месте, $X-1$ флаг на втором месте в «слове», $X-2$ флагов на третьем месте в «слове», $X-3$ флагов на четвертом месте в «слове» и $X-4$ флагов на пятом месте в «слове». При этом количество возможных слов будет равно произведению: $X*(X-1)*(X-2)*(X-3)*(X-4)$.

Тогда для Дяди Федора, у которого на один флаг меньше – количество слов будет равно:

$$(X-1)*(X-2)*(X-3)*(X-4)*(X-5).$$

Кроме того по условию у Шарика слов может получиться ровно в два раза больше, следовательно:

$$X*(X-1)*(X-2)*(X-3)*(X-4) = 2*(X-1)*(X-2)*(X-3)*(X-4)*(X-5), \text{ сократим и получим:}$$

$$X = 2*(X-5), \text{ следовательно } X = 10.$$

У Шарика флагов – 10 штук, у Дяди Федора их на один меньше – 9. Значит, Дядя Федор на чердаке нашел всего 19 флагов.

5. Основы логики (2 балла)**[Логика столбцов]****Условие:**

Матроскин решил изучить различные логические функции. Он узнал, что функции зависят от аргументов и есть три основных логических функции: «не», «и» и «или» (функции указаны в порядке убывания приоритета их выполнения).

Для функции «не» известно, что если значение ее аргумента «0», то значение функции «1» и наоборот.

Для функции «и» известно, что если все ее аргументы имеют значение «1», то функция будет иметь значение «1», при любых других сочетаниях значений аргументов функция принимает значение «0».

Для функции «или» известно, что если все ее аргументы имеют значение «0», то функция будет иметь значение «0», при любых других сочетаниях значений аргументов функция принимает значение «1».

С помощью основных функций могут быть построены более сложные составные логические функции. Значение таких функций для разных значений аргументов можно записывать в виде таблицы:

#1	#2	#3	Ф
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

В таблице в каждом из столбцов, обозначенных #1, #2, #3 находятся значения одного из аргументов А, В, С, а в столбце Ф значения функции.

Помогите Матроскину определить какой столбец соответствует какому аргументу если известно, что таблица составлена для функции эквивалентной функции $\Phi(A,B,C) = (A \text{ и не } B \text{ или } C) \text{ и } (B \text{ и } C \text{ или не } B)$.

В ответе запишите подряд без пробелов последовательность из трех латинских букв: сначала обозначение аргумента соответствующего столбцу #1, затем обозначение аргумента соответствующего столбцу #2 и в конце обозначение аргумента соответствующего столбцу #3.

Ответ: САВ**Решение:**

Упростим логическое выражение, определяющее функцию

$$\Phi(A,B,C) = (A \text{ и не } B \text{ или } C) \text{ и } (B \text{ и } C \text{ или не } B)$$

Раскроем скобки:

$$A \text{ и не } B \text{ и } B \text{ и } C \text{ или } A \text{ и не } B \text{ и не } B \text{ или } C \text{ и } B \text{ и } C \text{ или } C \text{ и не } B$$

Первый член содержит противоречие и всегда принимает ложное значение, поэтому получаем следующее эквивалентное выражение:

$$A \text{ и не } B \text{ или } C \text{ и } B \text{ или } C \text{ и не } B$$

Во втором и третьем члене вынесем C за скобки и получим следующее выражение:

$$A \text{ и не } B \text{ или } C \text{ и } (B \text{ или не } B)$$

Выражение в скобках всегда истинно, поэтому окончательно упрощенное выражение будет иметь вид:

$$A \text{ и не } B \text{ или } C$$

Построим его таблицу истинности функции $\Phi(A,B,C) = A \text{ и не } B \text{ или } C$, обратив внимание, что эта функция будет принимать истинные значения, если истинно C или если одновременно выполняется условие, что A - истинно, а B – ложно.

A	B	C	Ф
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Обратим внимание на строки, в которых функция принимает ложное значение (0). В третьей строке функция принимает ложное значение в ситуации, когда только один аргумент B – истинный, а остальные ложны. В исходной таблице тоже есть одна строка, в которой функция ложна при условии истинности только одного аргумента, находящегося в столбце #3 (строка 2), следовательно, столбец #3 соответствует аргументу B .

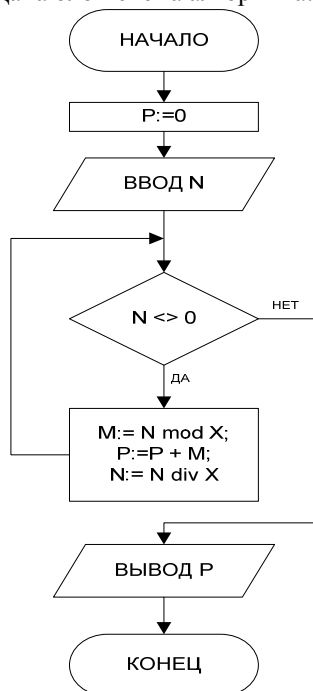
Теперь обратим внимание на седьмую строку построенной нами таблицы истинности. В ней функция принимает ложное значение при условии что только аргумент C ложный, а остальные аргументы истинны. В исходной таблице тоже есть строка, в которой функция ложна при условии ложности только одного аргумента, находящегося в столбце #1 (строка 4), следовательно, столбец #1 соответствует аргументу C . Значит, столбец #2 соответствует аргументу A . Мы определили какому аргументу соответствует какой столбец исходной таблицы и можем записать ответ: CAB .

6. Алгоритмизация и программирование, блок-схема (3 балла)

[Подбери цифру]

Условие:

Дана блок-схема алгоритма:



Какое максимальное целое значение должно быть у переменной X до начала выполнения алгоритма, если при выполнении фрагмента в переменную N записали число 335, а после завершения выполнения фрагмента на экран было выведено «5»?

В ответе укажите целое число.

Ответ: 331

Разбор:

Вывод на экран происходит по завершении выполнения цикла, то есть при выполнении условия, что $N=0$.

Для получения нулевого значения N в теле цикла необходимо разделить его на число большее чем N .

С другой стороны, если X будет изначально больше N , то остаток от деления N на X будет равен N и алгоритм завершится со значением $P=N$. Следовательно, значение N должно быть изначально больше X и уменьшаться уже в процессе вычисления в теле цикла.

Выводимое на экран значение переменной P получается в результате суммирования остатков от деления N на X .

Заметим, что если начальное значение $X < N$, то тело цикла выполнится не менее двух раз, поскольку при первом выполнении $N := N \text{ div } X$ будет получаться число, большее или равное 1. Причем, поскольку нам нужно максимальное число, очевидно, что его нужно искать среди чисел, которые после выполнения первого шага цикла будут давать значение N именно равное 1. Тогда остаток от деления N на X на первом шаге цикла должен быть $5-1=4$. Значит, нам необходимо найти максимальное число, меньшее 335, остаток от деления 335 на которое равен 4. Это число «331».

7. Алгоритмизация и программирование, анализ кода (1 балл)

[Повторитель]

Условие:

Шарик нашел на чердаке детский компьютер. Для программирования компьютера используется язык КуМир. Шарик написал программу на этом языке. Рассмотрим ее фрагмент:

```

sum:=0
нц для j от 1 до 12
    нц для i от 0 до n
        sum:=sum + i
    кц
кц
  
```

Чему равно значение целочисленной переменной n , если по завершении выполнения фрагмента значение переменной sum равно 2052

В ответе напишите целое число.

Ответ: 18

Решение:

Анализ алгоритма показывает, что переменная sum после его завершения хранит в себе результат суммирования значений индексной переменной i , которая, в свою очередь, возрастает от 0 до значения N с шагом 1 за каждую итерацию внешнего цикла с индексной переменной j . При этом во внешнем цикле выполняется 12 итераций.

Следовательно, если разделить итоговое значение переменной sum на 12 мы получим число равное сумме целых чисел от 0 до N . Что дает нам сумму арифметической прогрессии с шагом 1 от 0 до N . Для вычисления суммы чисел от 0 до N можно воспользоваться формулой суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

или в нашем случае:

$$S = \frac{0 + N}{2} \cdot (N + 1) = \frac{N^2 + N}{2}$$

Тогда:

$$\frac{N^2 + N}{2} = sum \div 12$$

$$N^2 + N = 342$$

Нас интересует только положительный корень этого уравнения. Решим это квадратное уравнение или подберем подходящее значение. Очевидно, что $N < 19$, поскольку $19^2 = 361$. Попробуем подставить 18 и получим, что $324 + 18 = 342$.

8. Алгоритмизация и программирование, формальный исполнитель (2 балла)

[Простокваша]

Условие:

Матроскин выяснил, что если несколько раз перелить из одного сосуда в другой молоко, то оно быстрее превращается в простоквашу. Он разработал такой алгоритм:

Из бочки набрать полное ведро молока (в бочке молоко может остаться).

Если в бочке меньше 11 литров, завершить выполнение алгоритма.

Из ведра перелить молоко в бидон, излишки молока, если они есть, перелить обратно в бочку.

Из бидона разлить молоко в банки, излишек молока, если он есть, вернуть в бочку.

Перейти к шагу 1.

Определите, сколько раз выполнялся пункт 1 алгоритма, если известно, что:

1. В бочке 88 литров молока.
2. Ведро вмещает 12 литров.
3. Бидон объемом 7 литров.
4. За один раз из бидона наполняются четыре литровых банки.

У Матроскина есть достаточное количество банок.

В ответе укажите целое число.

Ответ: 18

Решение:

Завершение выполнения алгоритма происходит при выполнении условия в пункте 2.

К моменту первой проверки условия пункт 1 выполнится один раз. В момент первой проверки в бочке будет $88 - 12 = 76$ литров.

После выполнения пунктов 3, 4, 5 и повторно пункта 1 к моменту второй проверки, в бочке будет 72 литра молока. Таким образом, за один период выполнения шагов алгоритма между двумя проверками количество молока в бочке уменьшается на 4 литра.

Для выполнения условия завершения алгоритма в пункте 2 необходимо, чтобы в этот момент в бочке было не более 11 литров молока. Для этого необходимо забрать из бочки не менее $76 - 11 = 65$ литров молока. Определим, сколько нужно раз повторить выполнение шагов алгоритма от проверки до проверки, чтобы забрать это количество молока: $65 / 4 = 16,25$. То есть, если выполнить алгоритм 16 раз, то из бочки будут забраны $16 * 4 = 64$ литра. Но после 17-го повторения пунктов 3, 4, 5, 1 в бочке останется $76 - (4 * 17) = 8$ литров молока, что и приведет к завершению алгоритма.

Нужно не забыть, что вначале пункт 1 алгоритма будет один раз выполнен перед первой проверкой условия, что даст нам ответ $17 + 1 = 18$.

9. Технологии хранения, поиска и сортировки информации (2 балла)

[Сортированная выборка]

Условие:

Почтальон Печкин проводил ревизию остатков в киоске на почте. И получил следующую таблицу:

Наименование	Артикул	Цена	Количество
Футляр для очков	102045	600	29
Чехол для телефона	102050	800	31
Сумка для фотоаппарата	102075	1100	29
Чехол для фотоаппарата	102098	1000	34

Пенал-карман	102080	500	30
Сумка-чехол для телефона	102018	700	33
Кошелек-чехол для телефона	102019	900	32
Пластик-пакет для телефона	102040	400	29
Мобильный чехол	102013	300	28

Определите **минимальное** значение X , такое что если применить к этой таблице фильтр:

(Цена < 30*X) И (Количество >= X)

то будет не менее двух строк, соответствующих фильтру и их сортировка по возрастанию значений столбца «Артикул», приведет к тому, что значения в столбце «Количество» окажутся отсортированы по убыванию. Найдите и запишите в ответ это число.

Ответ: 30

Решение:

Рассматривать значение X большее 33 нет необходимости, так как в этом случае после фильтрации будет отобрано менее двух строк, соответствующих условию (**Количество >= X**).

Так же определяется минимальное значение X равное 14, так как по результатам фильтрации при $X < 14$ будет отобрано менее двух строк, соответствующих условию (**Цена < 30*X**).

Если при фильтрации задать значение X равное 14 мы получим две строки:

Наименование	Артикул	Цена	Количество
Пластик-пакет для телефона	102040	400	29
Мобильный чехол	102013	300	28

Обратим внимание, что при возрастании значений в поле артикул, количество так же возрастает, что противоречит условию. Следовательно, в результатах фильтрации не должно быть значения цены 300, а это можно обеспечить увеличением значения X до 29.

Применим фильтр при X равном 29 и проведем сортировку по столбцу «Артикул»:

Наименование	Артикул	Цена	Количество
Сумка-чехол для телефона	102018	700	33
Пластик-пакет для телефона	102040	400	29
Футляр для очков	102045	600	29
Чехол для телефона	102050	800	31
Пенал-карман	102080	500	30

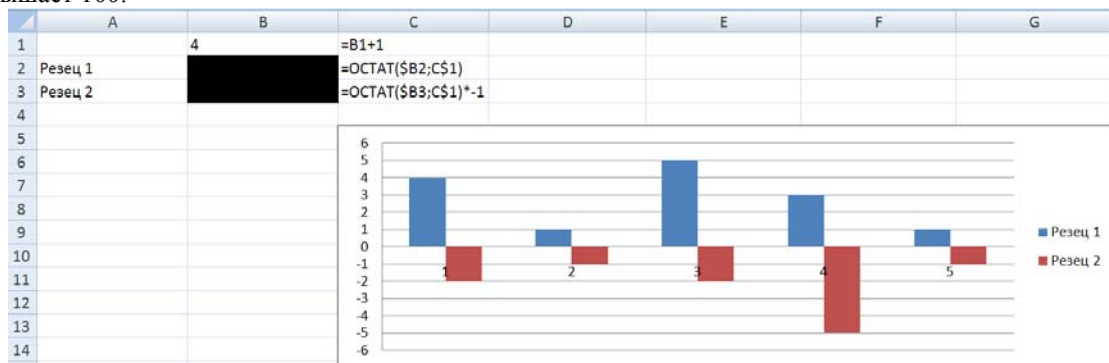
Легко заметить, что значения в столбце «Количество» не отсортированы по убыванию, но если исключить строки со значением 29 в столбце «Количество», оставшиеся строки окажутся отсортированы по убыванию. Для их исключения необходимо увеличить X до 30. Это и будет минимальным значением X , удовлетворяющим всем условиям.

10. Технологии обработки информации в электронных таблицах (2 балла)

[Бороздки]

Условие:

Шарик приобрел небольшой программируемый фрезерный станок для деревообработки. Величина смещения резца задается набором значений. Для расчета этих значений Шарик написал в ячейках C1, C2 и C3 приведенные на рисунке формулы. Затем он ячейку C1 скопировал во все ячейки диапазона D1:G1, ячейку C2 скопировал во все ячейки диапазона D2:G2, а ячейку C3 скопировал во все ячейки диапазона D3:G3. По данным диапазона C2:G3 он построил столбчатую диаграмму. Определите какие целочисленные значения поставил Шарик в ячейки B2 и B3, если известно, что их сумма не превышает 100.



В ответе через запятую сначала приведите значение ячейки B2, затем значение ячейки B3.

Ответ: 19, 37

Решение:

Проанализируем представленный фрагмент электронной таблицы:

В результате копирования ячейки C1 во все ячейки диапазона D1:G1 получим ряд чисел: 5 6 7 8 9.

В строке 2 начиная со столбца С будут записаны остатки от деления числа записанного в ячейке В2 соответственно на 5, 6, 7, 8 и 9. А в строке 3 начиная со столбца С будут записаны остатки от деления числа записанного в ячейке В3 соответственно на 5, 6, 7, 8 и 9, умноженные на -1.

Число в ячейке В2 при делении на 9 должно давать остаток 1, следовательно это одно из чисел: 10,19,28,37,46,55,64,73,82,91. Большие числа не рассматриваются, поскольку сумма чисел в ячейках В2 и В3 не должна превышать 100.

Из представленного ряда необходимо убрать числа, остаток от деления которых на 5 не равен 4, получаем 19 или 64.

При делении оставшихся чисел на 6 остаток 1 может быть получен лишь для числа 19.

Проверяем, что остаток при делении 19 на 8 – 3, при делении 19 на 7 – 5 и утверждаем значение 19 для ячейки В2.

Аналогично для В3 определяем числа, дающие остаток от деления на 9 равный 1, но с учетом того, что сумма с уже определенным значением В2 не должна превышать 100: 10,19,28,37,46,55,64,73.

Из представленного ряда убираем числа остаток от деления которых на 5 не равен 2 и получаем 37.

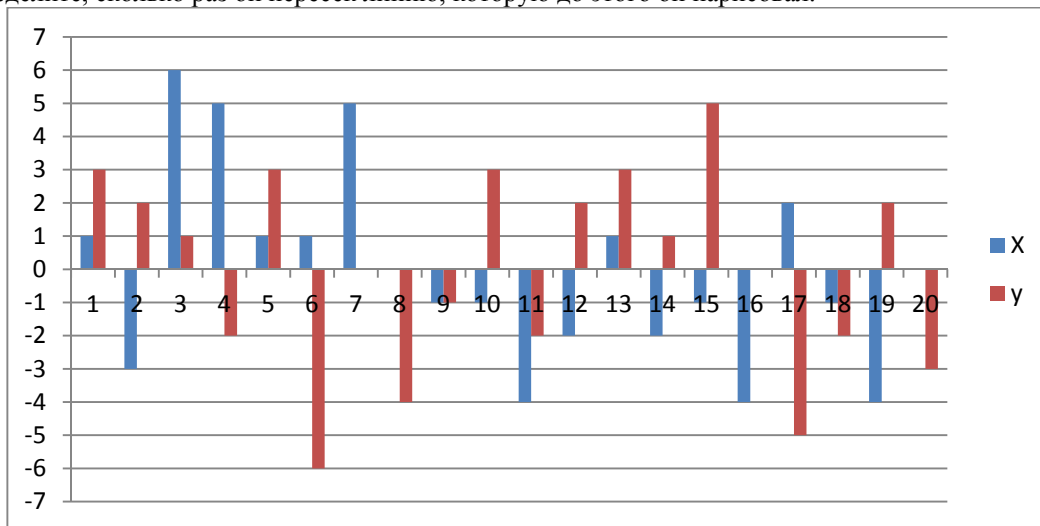
Проверяем, что остаток при делении 37 на 8 – 5, при делении 37 на 6 – 1, при делении 37 на 7 – 2 и утверждаем значение 37 для ячейки В3.

11. Информационное моделирование (1 балл)

[Ломаная]

Условие:

Дядя Федор сделал исполнитель Рисовальщик. За один ход исполнитель может сместиться на X координат по горизонтали и на Y координат по вертикали, рисуя непрерывную прямую линию, соединяющую начальное и конечное положение. X и Y – любые целые числа. От того, отрицательные они или положительные – зависит направление смещения исполнителя. Дядя Федор сформировал программу для исполнителя в виде графика смещения по ходам. На графике по оси абсцисс расположены номера ходов, а по оси ординат – значения X и Y. Всего исполнитель Рисовальщик сделал 20 ходов. Определите, сколько раз он пересек линию, которую до этого он нарисовал.

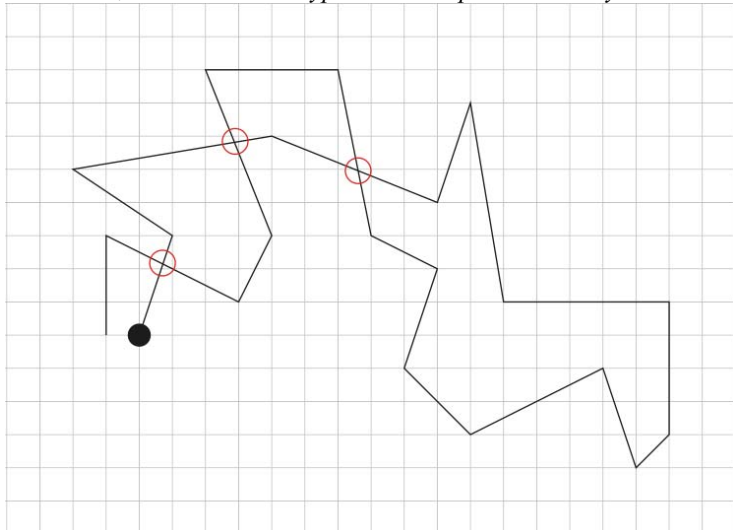


В ответе укажите число.

Ответ: 3

Решение:

Поскольку в задаче говорится лишь о пересечении нарисованной Рисовальщиком линии, то откуда начинать движение не имеет значения, существенно лишь смещение на каждом шаге алгоритма выполняемого Рисовальщиком. Следовательно, необходимо аккуратно построить ломаную линию нарисованную исполнителем:



Начало движения Рисовальщика обозначено черной точкой. На рисунке кружочками красного цвета обозначены пересечения уже нарисованной линии, их три.