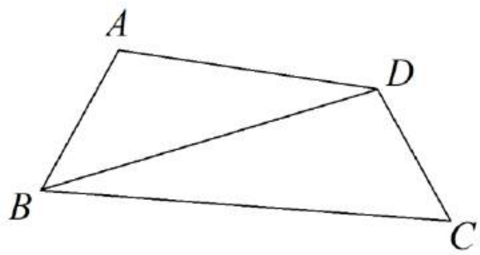
Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАКЛЮЧИТЕЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП
Математика 8 и 9 класс, 2017/2018 учебный год

Задание 1. (10 баллов)

Длины сторон *AB, BC, CD* и *DA* выпуклого четырехугольника *ABCD* равны соответственно 5, 17, 5 и 9. Найдите длину диагонали *DB*, если известно, что она является целым числом.

Решение.



По неравенству треугольника

$BD > BC - DC = 12$ и $BD < AB + AD = 14$,

следовательно, $12 < BD < 14$. Так как BD целое, то $BD = 13$.

Ответ: 13.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Приведены основные оценки. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа. Ответ верный.	±	7
Приведены основные оценки. Ответ неверный.	+/2	5
Ответ верный, но решение отсутствует или не содержит существенного продвижения.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 2. (10 баллов)

Найдите знаменатель дроби $\dfrac{100!}{28^{20}}$ после ее сокращения до несократимой.

(Выражение 100! равно произведению первых 100 натуральных чисел: $100! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 100$.).

Решение.

Можно заметить, что среди чисел от 1 до 100 ровно 14 чисел делятся на 7, ровно два делятся на 49, поэтому в разложении $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 100$ в произведение простых множителей число 7 войдет в степени 16. Среди чисел от 1 до 100 ровно 50 четных, поэтому в разложении $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 100$ в произведение простых множителей число 2 войдет в степени, не меньшей 50. Поэтому в дроби $\frac{100!}{28^{20}} = \frac{100!}{7^{20}\cdot 2^{40}}$ после сокращения в знаменателе останется лишь $7^4 = 2401$.

Ответ: 2401.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Допущена незначительная вычислительная ошибка.	±	7
Найдена основная идея решения. Решение неполное. Ответ верный.	+/2	5
Найдена основная идея решения. Решение неполное. Ответ неверный.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 3. (12 баллов)

Последовательность $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ такова, что $a_{2n} = \frac{1}{a_{2n-1}}$, а $a_{2n+1} = 1 - a_{2n}$.

Найдите a_1, если $a_{2018} = 2$.

Решение.

Найдем несколько последних значений последовательности, учитывая, что $a_{2n-1} = \frac{1}{a_{2n}}$ и $a_{2n} = 1 - a_{2n+1}$:

$$a_{2018} = 2;\ a_{2017} = 0,5;\ a_{2016} = 0,5;\ a_{2015} = 2;\ a_{2014} = -1;\ a_{2013} = -1;\ a_{2012} = 2;\ a_{2011} = 0,5...$$

Таким образом, получили периодическую последовательность с периодом 6.

Следовательно, $a_1 = a_{1+336\cdot 6} = a_{2017} = 0,5$.

Ответ. 0,5

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Найдена основная идея решения. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа. Ответ верный.	±	9
Найдена основная идея решения. Отсутствует необходимая строгость в получении ответа и/или допущена вычислительная ошибка. Может быть получен неверный ответ.	+/2	6
Показана идея периодичности. Период не найден или найден неверно.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 4. (12 баллов)

Турнир по стрельбе предполагает несколько серий по 10 выстрелов каждая. В одной серии Иван выбил 82 очка, в результате чего среднее количество очков, выбиваемых им за серию, увеличилось с 75 до 76 очков. Сколько очков должен выбить Иван в следующей серии выстрелов, чтобы среднее количество очков, выбитых за серию, стало равно 77?

Решение.

Пусть N – выбитые за n рассматриваемых серий, в последней из которых Иван выбил 82 очка. Тогда $N = 76n$ и $N - 82 = 75(n-1)$. Решая полученную систему находим n = 7 и N = 532.

Пусть для выполнения условия задачи Ивану необходимо выбить x очков. В этом случае получаем $77 \cdot 8 = 532 + x \quad \Rightarrow \quad x = 84$.

Ответ: 84.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. Ответ верный.	±	9
Обосновано приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.		
Приведены все основные логические шаги решения. Верно составлена система уравнений. Решение системы содержит ошибки или не доведено до конца.	+/2	6
Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или неверный.	∓	2
Ответ верный, решение отсутствует или не содержит существенного продвижения.		

Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	–/0	0
Максимальный балл		12

Задание 5. (12 баллов)

Уравнение $x^2+ax+b+1=0$ имеет два различных ненулевых целочисленных корня. Докажите, что число a^2+b^2 не является простым, если числа a и b целые?

Доказательство.

Пусть x, y – целочисленные корни данного уравнения. По теореме Виета $x+y=-a$ и $xy=b+1$, следовательно,

$$a^2+b^2=(x+y)^2+(xy-1)^2=x^2+2xy+y^2+x^2y^2-2xy+1=$$
$$=x^2+y^2+x^2y^2+1=(x^2+1)(y^2+1)$$

Поскольку x, y, то число a^2+b^2 разложили на два целых множителя, каждый из которых больше 1, поскольку x, y – положительные целые числа.

Таким образом, число a^2+b^2 составное.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Найдена основная идея решения. Отсутствует необходимая строгость в доказательстве.	±	9
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	–/0	0
Максимальный балл		12

Задание 6. (14 баллов)

По регламенту шахматного турнира каждый участник должен сыграть с каждым один раз. После того как было сыграно ровно 99 партий, оказалось, что множество участников турнира можно разбить на две неравные по численности группы так, что все соперники, относящиеся к одной и той же группе, уже сыграли партии между собой. При этом были сыграны, но не более четырех, партии между соперниками, которые относятся к разным группам. Каково наибольшее возможное число участников этого шахматного турнира?

Решение.

Пусть число участников турника равено n, а число попавших в 1-ю группу равно k. Тогда число сыгранных партий равно:

$$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)((n-k)-1)}{2}+m=99, \text{ где } m \text{ - мало}, \Rightarrow$$

$$k^2-k+(n-k)^2-(n-k)+2m-198=0$$

$$k^2-k+k^2-2kn+n^2-n+k+2m-198=0$$

$$2k^2-2kn+\left(n^2-n+2m-198\right)=0$$

$$\frac{D}{4}=n^2-2\left(n^2-n+2m-198\right)=-n^2+2n-4m+396\geq 0$$

$$n^2-2n+(4m-396)\leq 0 \qquad (n-1)^2-(397-4m)\leq 0$$

$$n_{\max}=1+\sqrt{397-4m}\leq 20.$$

Если $n=20$, то:

$$2k^2-40k+(400-20+2m-198)=0$$

$$k^2-20k+91+m=0$$

$k=10,\ n-k=10,\ \ m=9$ - противоречие;

$k=11,\ n-k=9,\ \ m=8$ - противоречие;

$k=12,\ n-k=8,\ \ m=5$ - противоречие;

$k=13,\ n-k=7,\ \ m=0$ - противоречие;

при $k>13 \quad m<0$ - противоречие.

Если $n=19$, то:

$$2k^2-38k+(361-19+2m-198)=0$$

$$k^2-19k+(72+m)=0,$$

$k=10,\ n-k=9,\ \ m=18$ - противоречие;

$k=11,\ n-k=8,\ \ m=16$ - противоречие;

$k=12,\ n-k=7,\ \ m=12$ - противоречие;

$k=13,\ n-k=6,\ \ m=6$ - противоречие;

при $k>13 \quad m<0$ - противоречие.

Если $n=18$, то:

$$2k^2-36k+(324-18+2m-198)=0$$

$$k^2-18k+(54+m)=0,$$

$k=9,\ n-k=9,\ \ m=27$ - противоречие;

$k=10,\ n-k=8,\ \ m=26$ - противоречие;

$k=11,\ n-k=7,\ \ m=23$ - противоречие;

$k=12,\ n-k=6,\ \ m=18$ - противоречие;

$k=13,\ n-k=5,\ \ m=11$ - противоречие;

$k=14,\ n-k=4,\ \ m=2$ - это решение.

Итак, наибольшее возможное число участников равно 18, группы участников насчитывают 4 и 14 человек, количество «межгрупповых» партий равно 2.

Ответ: 18.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	14
Ответ верный. Приведены обоснованные верные оценки для наибольшего числа участников турнира. Отсутствует <u>строгое</u> обоснование приведенных оценок <u>или</u> ответа.	±	11
Ответ верный. Приведены обоснованные верные оценки для наибольшего числа участников турнира. Отсутствует <u>строгое</u> обоснование приведенных оценок <u>и</u> ответа.	+/2	7
Ответ верный. Приведены верные, но не обоснованные оценки для наибольшего числа участников турнира. Приведено строгое обоснование ответа по указанным оценкам.		
Ответ неверный или отсутствует. В решении приведены обоснованные оценки для оценки для наибольшего числа участников турнира или составлены верные соотношения, из которых они получаются.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 7. (14 баллов)

В компании работает 168 человек. Среди любых четырех человек можно выбрать хотя бы одного, знакомого с остальными тремя. Каково минимальное возможное количество людей, которые знакомы со всеми?

<u>*Решение.*</u>

Если незнакомых людей нет, то количество людей, которые знакомы со всеми, равно 168. Пусть A и B не знакомы друг с другом, тогда все остальные люди знакомы между собой (если C не знаком с D, то в группе A, B, C, D никто не знаком с остальными тремя). Если A и B знакомы со всеми остальными, то 166 человек знакомы со всеми. Если же А не знаком также и с C, где $C \neq D$, то и A, и B, и C знакомы со всеми остальными 165 людьми (так как в любой группе A, B, C, D только D может быть знакомым с остальными тремя), которые к тому же знакомы между собой. Таким образом, минимальное количество людей, знакомых со всеми, равно 165.

<u>*Ответ.*</u> 165

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	14
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	11
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	∓	3
Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или		

неверный.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	$-/0$	0
Максимальный балл		14

Задание 8. (16 баллов)

Вова играл старыми костяшками от домино, на которых стерлись все точки, так что они стали не отличимыми. Каждая костяшка представляет собой прямоугольник 2×1, а их число равно 24. Вова решил каждый день по-новому раскладывать костяшки в виде дорожки 2×12, так чтобы рисунок раскладки никогда не повторялся. Сколько дней Вова сможет так раскладывать костяшки, пока все возможные раскладки не будут исчерпаны, если в день он делает одну раскладку?

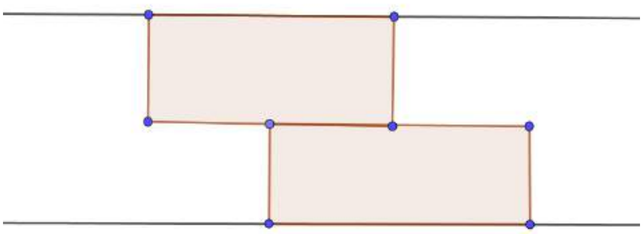
Решение.

Будем полагать, что дорожки расположены горизонтально, длинной стороной вдоль оси абсцисс. Костяшки в таких дорожках бывают двух видов: вертикальные (расположенные поперек дорожки) и горизонтальные, расположенные вдоль дорожки.

Каждая вертикальная костяшка как бы «перерезает дорожку» и делит ее на две части, справа и слева от себя.

Каждая горизонтальная костяшка обязательно имеет парную горизонтальную костяшку, вместе с которой она образует квадрат 2×2.

Действительно, если бы была пара горизонтальных костяшек, которые бы не образовывали квадрат (т.е. располагались так, как показано на рисунке), то обе части дорожки справа и слева от этой пары костяшек содержали бы нечетные количества костяшек и не могли бы быть покрыты костяшками.



Обозначим через $F(n)$ число возможных замощений костяшками размером 2×1 дорожки размером $2\times n$. Тогда, очевидно, $F(1)=1$, $F(2)=2$, $F(3)=3$.

Каждое замощение дорожки $2\times n$ имеет на правом своем конце или вертикальную костяшку (удалив которую можно получить замощение дорожки $2\times(n-1)$) или пару горизонтальных костяшек (удалив которые можно получить замощение дорожки $2\times(n-2)$). Это обстоятельство обосновывает формулу: $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$, т.е. последовательность $F(n)$ является последовательностью Фибоначчи.

Ответ: $F(12)=233$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы

Полное решение.	+	16
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	12
Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В результате вычислительной ошибки или описки может быть получен неверный ответ.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении. Ответ отсутствует.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16