Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАКЛЮЧИТЕЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 11 класс, 2017/2018 учебный год

Задание 11.1. (10 баллов)

Даны последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \dfrac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \ldots x_{2018}$?

<u>Решение.</u>

Из условия задачи следует, что $x_n x_{n-1} = n$. Следовательно,
$$x_1 x_2 \ldots x_{2018} = (x_1 x_2)(x_3 x_4)\ldots(x_{2017} x_{2018}) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot K \cdot 2018 = 2^{1009} \cdot 1009!$$
В полученном произведении 201 число делится на 5, 40 чисел, которые делятся на 25, 8 чисел, которые делятся на 125 и 1 число, делящихся на 625.
Таким образом, в полученном произведении число 5 входит в степени 201 + 40 + 8 + 1= 250. При этом 2 входит в данное произведение в степени большей 250.
Остальные числа не оканчиваются 0 или 5 и являются четными, поэтому их произведение, также не оканчивается 0.
Следовательно, данное произведение оканчивается на 250 нулей.
<u>Ответ.</u> 250.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	10
Обосновано приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	+.	8
Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. Ответ верный.	±	7
Обосновано приведены все основные логические шаги решения, в том числе показывается, что нужно учитывать делимость на степень 5. В результате неправильного учета отдельного случая делимости на степень 5 получен неверный ответ.		
Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В	+/2	5

результате вычислительной ошибки или описки может быть получен неверный ответ.		
Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. Показывается, что нужно учитывать делимость на степень 5, но в результате ошибки получен неверный ответ.		
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	∓	2
Найдена основная идея решения. Не учтены числа, которые делятся на 25, 125 и 625.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 11.2. (10 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+2|x-1|+3|x-2|\ldots+11|x-10|$.

Решение.

Числовую ось можно разбить на 12 подмножеств: $(-\infty;0),(0;1),(1;2),\ldots,(9;10),(10;+\infty)$. На каждом из этих множеств функция является линейной и имеет вид $f(x)=k_i x+b_i$. Пусть k_i - угловой коэффициент на *i*-ом слева множестве ($k_1=-1-2-\ldots-11=-66$ при $x\in(-\infty;0)$, $k_2=1-2-3-\ldots-11=-64$ при $x\in(-\infty;0)$ …)..

Заметим, что $k_1<k_2<...<k_{11}=66$. Следовательно, функция $f(x)$ сначала убывает, а потом возрастает. Так как $k_8=1+2+\ldots+7-8-9-10-11=-10$ при $x\in(6;7)$, а $k_9=1+2+\ldots+7+8-9-10-11=6$ при $x\in(7;8)$, то наименьшее значение функции достигается в точке $x=7$. Оно равно $f(7)=146$.

Ответ: 146.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	10
Обосновано приведены все основные шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	+.	8
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	7
Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	+/2	5
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	∓	2

Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или неверный.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 11.3. (12 баллов)

Сколько различных корней имеет уравнение $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)=1$, если $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$.

<u>*Решение.*</u>

Пусть $f(x)=k=x-\dfrac{2}{x}$, $f\big(f(x)\big)=f(k)=k-\dfrac{2}{k}$, $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)=f\big(f(k)\big)=f(k)-\dfrac{2}{f(k)}$.

Уравнение $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)=f(k)-\dfrac{2}{f(k)}=1 \Leftrightarrow f^2(k)-f(k)-2=0$ имеет два решения $f_1(k)=-1$ и $f_2(k)=2$.

Получаем $\left[\begin{array}{l} f(k)=k-\dfrac{2}{k}=-1 \\ f(k)=k-\dfrac{2}{k}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k^2+k-2=0 \\ k^2-2k-2=0 \end{array}\right.$.

Совокупность, имеет четыре различных корня k_1,k_2,k_3,k_4.

Заметим, что уравнения $x-\dfrac{2}{x}=k \Leftrightarrow x^2-k_ix-2=0$ имеют два различных корня и эти уравнения с различными k_i не имеют общих корней.

(Школьники должны это строго доказать или найти в явном виде корни x).

Итак, исходное уравнение имеет 8 различных корней.

<u>*Ответ.*</u> 8.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. В решении присутствуют арифметические ошибки или описки, которые не повлияли на общий ход решения.	+.	10
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	9
Приведены все основные логические шаги решения. В результате неверного рассуждения получен неверный ответ.	+/2	6
Ответ верный. Приведены основные логические шаги решения. Отсутствует доказательство, что уравнения $x^2-k_ix-2=0$ при различных k_i не имеют общих корней.		

Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	$\mp$	2
Приведены некоторые шаги, отражающие общую идею решения. Ответ отсутствует или неверный.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	$-/0$	0
Максимальный балл		12

Задание 11.4. (12 баллов)

Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

Решение.

Пусть в 2016 году в фирме работало x трудяг, тогда численность лентяев составляла $9x$, а всего в фирме работало $10x$ человек. Пусть средняя заработная плата лентяя была равна s, тогда средний трудяга получал $2s$, а средняя зарплата по всей фирме равнялась $\frac{2sx+9xs}{x+9x}=\frac{11s}{10}$.

Пусть в 2017 году осталось y лентяев, тогда средняя зарплата по всей фирме (с учетом повышения зарплаты трудягам на 50%) стала такой: $\frac{3sx+ys}{x+y}$.

Таким образом, получаем уравнение:

$$\frac{3sx+ys}{x+y}=\frac{11s}{10}\cdot\frac{12}{10}$$

$$100(3sx+ys)=132(x+y)$$

$$50(3sx+ys)=66(x+y)$$

$$150x+50y=66x+66y$$

$$84x=16y$$

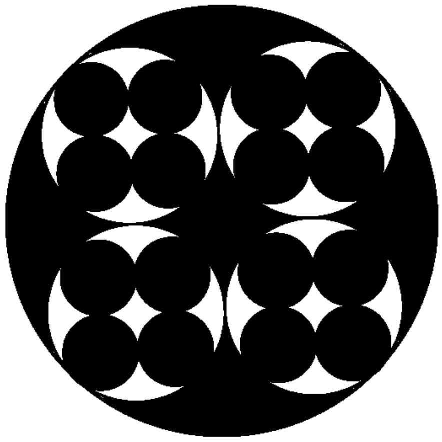
$$y=\frac{21}{4}x$$

В итоге: $\frac{x\cdot 100\%}{x+y}=\frac{x\cdot 100\%}{x+\frac{21}{4}x}=\frac{4\cdot 100\%}{4+21}=\frac{4\cdot 100\%}{25}=16\%$.

Ответ. 16%.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. В решении присутствуют арифметические ошибки или описки, которые не повлияли на общий ход решения.	+.	10
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	9
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца или содержит ошибки. При этом выполнена существенная часть решения, в частности верно составлена система уравнений.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении. При этом соответствующая система уравнений составлена неверно.	∓	2
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца или содержит ошибки. При этом выполнена существенная часть решения.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 11.5. (12 баллов)



На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрашен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются четыре новые внутренне касающиеся ее окружности равных радиусов. Эти четыре окружности внешне касаются друг друга. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.

Решение.

Если на некотором шаге был изображен круг радиуса R, то на следующем шаге будут изображены окружности радиусов $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$. Таким образом, площадь белой области есть сумма:

$$\underset{\substack{\text{4 белых круга}\\\text{второго шага}}}{\frac{4\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}} - \underset{\substack{\text{16 черных кругов}\\\text{3-го шага}}}{\frac{16\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^4}} + \underset{\substack{\text{64 белых кругов}\\\text{4-го шага}}}{\frac{64\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^6}} - \frac{256\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^8} + \frac{1024\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{10}} - \ldots$$

Это сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с $b_1 = \frac{4\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$ и

$$q = -\frac{4}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}.\ S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{4\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}}{1+\frac{4}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{4\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+4}.$$

Ответ: $S = \frac{4\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+4}$.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. В решении присутствуют арифметические ошибки или описки, которые не повлияли на общий ход решения.	+.	10
Ответ верный. Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	9
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца или содержит ошибки. При этом выполнена существенная часть решения.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 11.6. (14 баллов)

Действительные числа a и b таковы, что $\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)=1$. Найдите сумму $a + b$.

Решение.

$$b+\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{a+\sqrt{1+a^2}}=-a+\sqrt{1+a^2}$$

$$a+\sqrt{1+a^2}=\frac{1}{b+\sqrt{1+b^2}}=-b+\sqrt{1+b^2}$$

Складывая полученные равенства, получаем

$$a+b+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}=-a-b+\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2} \quad \Rightarrow a+b=0.$$

Ответ. 0.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	14
Представлены все основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.	±	11
Найдена идея решения. Представлены основные логические шаги решения. Ответ неверный или отсутствует.	+/2	7
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 11.7. (14 баллов)

Назовем положительное число a близким сверху положительному числу b, если a превосходит b, но не больше чем на 1%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

Решение.

Пусть угол радианная мера угла α близка сверху радианной мере угла β, то есть

$$\beta<\alpha<1{,}01\beta.$$

Покажем, что длина стороны a близка сверху длине стороне b.

Поскольку напротив большего угла лежит большая сторона, достаточно доказать, что $a<1{,}01b$.

В силу убывания функции $y = \frac{\sin x}{x}$ (школьники должны доказать это) получаем

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} < \frac{\sin\beta}{\beta}.$$

Так как $\alpha < 1{,}01\beta$, то $\frac{\sin\alpha}{1{,}01\beta} < \frac{\sin\beta}{\beta} \Rightarrow \sin\alpha < 1{,}01\sin\beta$.

По теореме синусов $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \frac{1{,}01\sin\beta}{a} > \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow a < 1{,}01b$, что и требовалось доказать.

Доказательство, что функция $y = \frac{\sin x}{x}$ убывает на отрезке $(0;\pi)$:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} < 0.$$

Действительно, $\left(x\cos x - \sin x\right)' = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x < 0$. Следовательно, функция $y = x\cos x - \sin x$ убывает на отрезке $(0;\pi)$ и $y(0) = 0$. То есть $x\cos x - \sin x < 0$ на отрезке $(0;\pi)$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	14
Приведены все основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов.	±	11
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца или содержит ошибки. При этом выполнена существенная часть решения.	+/2	7
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении	∓	4
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 11.8. (16 баллов)

В алфавите языка альфов три буквы *А*, *Л* и *Ф*. Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

(1) поменять порядок букв в слове на противоположный

(2) заменить две последовательные буквы так: *ЛА* → *ФФ*, *АФ* → *ЛЛ*, *ФЛ* → *АА*, *ЛЛ* → *АФ*, *ФФ* → *ЛА* или *АА* → *ФЛ*.

Известно, что *ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ* – это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово *ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ*?

Решение.

Назовем «величиной» слова число $n - m$, где n и m – количество букв Л и А соответственно в данном слове. Заметим, что все допустимые операции сохраняют остаток «величины» слова по модулю 3. «Величина» известного слова *ЛЛАФАЛАФФАЛАФФФАЛАФФФФАЛЛ* равна $7 - 8 = -1$, а «величина» слова *ЛФАЛФАЛФАЛФАЛАФЛАФЛАФЛАФЛ* равна $9 - 8 = 1$, то есть такое слово не может встретиться в алфавите этого языка.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	16
Найдена идея решения. Решение не доведено до конца или содержит ошибки. При этом имеется существенное продвижение в верном направлении.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении.	∓	4
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16