Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАКЛЮЧИТЕЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП
Математика 10 класс, 2017/2018 учебный год

Задание 1. (10 баллов)
Пять различных по весу гирь, каждая из которых весит целое число килограмм, были взвешены всевозможными группами по три гири. В результате получили следующие веса (в килограммах) десяти взвешенных групп: 10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24. Найдите веса этих пяти гирь.
Решение.

Пусть $a > b > c > d > e$ – веса данных гирь. Поскольку каждая гиря входит в шесть из десяти взвешенных троек, то сумма полученных весов равна $6(a+b+c+d+e)$, следовательно,

$$a+b+c+d+e = \frac{10+14+15+16+17+17+18+21+22+24}{6} = 29.$$

При этом

$$a+b+c = 24, c+d+e = 10 \Rightarrow a+b+2c+d+e = 34 \Rightarrow c = 34-29 = 5.$$

$$a+b+d = 22, c+d+e = 10 \Rightarrow a+b+c+2d+e = 32 \Rightarrow d = 32-29 = 3.$$

$$a+b+c = 24, b+d+e = 14 \Rightarrow a+2b+2c+d+e = 38 \Rightarrow b = 38-29 = 9.$$

Получаем

$$a+b = 19 \Rightarrow a = 10 \text{ и } d+e = 5 \Rightarrow e = 2$$

Ответ. 10, 9, 5, 3, 2.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	±	7
Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	+/2	5
Ответ верный. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В	+/2	5

частности, не показано что указанный ответ единственный.		
Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или неверный.	$\mp$	2
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 2. (10 баллов)

Даны 2018 чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2018}$, каждое из которых равно либо $2-\sqrt{3}$ либо $2+\sqrt{3}$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \ldots + x_{2017}x_{2018}$, если известно, что она является целым числом.

Решение.

Заметим, что произведение $x_{2k-1}x_{2k}$ может принимать одно из трех значений:

$$(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 7-2\sqrt{3},$$

$$(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 7+2\sqrt{3},$$

или

$$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1.$$

Путь a раз в рассматриваемой сумме встречается число $2-\sqrt{3}, b$ раз – число $2+\sqrt{3}$. Тогда количество слагаемых равных 1 в этой сумме будет $1009-a-b$. В этом случае данная сумма равна

$$a(7-2\sqrt{3}) + b(7+2\sqrt{3}) + 1009 - a - b = 1009 + 6a + 6b + 7(b-a)\sqrt{3}.$$

Поскольку сумма целое число, то $a = b$, а сумма равна $1009+12a$.

Так как a может в условиях задачи может принимать значения от 0 до 504

($2a = a+b \le 1009 \Rightarrow a \le 504{,}5$), то максимальное значение рассматриваемой суммы равно $1009 + 12\cdot 504 = 7057$.

Ответ. 7057.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	±	7
Приведены основные логические шаги решения. Отсутствует	+/2	5

строгое обоснование отдельных выводов. В частности, может быть не доказано, что указанный ответ соответствует максимальному значению. Ответ верный.		
Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или неверный.	∓	2
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 3. (12 баллов)

Найдите наименьшее значение функции $f(x)=|x|+|x+1|+\ldots+|x+2022|$.

<u>*Решение.*</u>

Числовую ось можно разбить на 2024 подмножества: $(-\infty;-2022),(-2022;-2021),(-2021;-2020),\ldots,(-2;-1),(-1;0),(0;+\infty)$. На каждом из этих множеств функция является линейной и имеет вид $f(x)=k_i x+b_i$. Пусть k_i - угловой коэффициент на *i*-ом слева множестве ($k_1=-2023<0$ при $x\in(-\infty;-2022)$, $k_2=-2021<0$ при $x\in(-2022;-2021)\ldots$).

Заметим, что $k_1<k_2<\ldots<k_{2024}=2022$. Следовательно, функция $f(x)$ сначала убывает, а потом возрастает. Так как $k_{1011}=-1$ при $x\in(-1012;-1011)$, а $k_{1012}=1$ при $x\in(-1011;-1010)$ то наименьшее значение функции достигается в точке $x=-1011$. Оно равно $y_{\max}=f(-1011)=2\cdot\dfrac{1011\cdot(1011+1)}{2}=1023132$.

<u>*Ответ:*</u> 1023132.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	12
Приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	±	9
Приведены основные логические шаги решения. Отсутствует строгое обоснование отдельных выводов. В частности, может быть не доказано, что указанный ответ соответствует минимальному значению. Ответ верный.	+/2	6
Найдена основная идея решения. Ответ отсутствует или неверный.	∓	2
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.		
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0

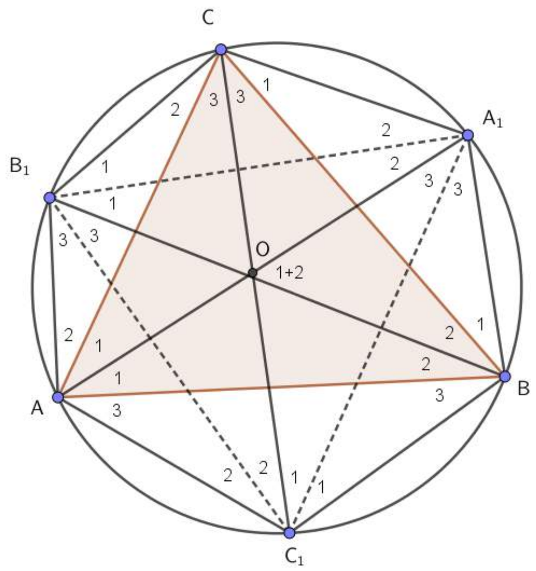
Максимальный балл	12

Задание 4. (12 баллов)

Биссектрисы углов *A*, *B* и *C* треугольника ABC пересекаются с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_1, B_1 и C_1, соответственно. Найдите расстояния между точкой A_1 и центром вписанной в треугольник ABC окружности, если известно, что $\angle A_1B_1C_1 = 50^o$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^o$, $B_1C_1 = \sqrt{3}$.

Решение.

На рисунке одинаковыми числами помечены равные углы (это следует из того, что AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы углов треугольника ABC, помеченный «1+2» угол около точки *O* (это центр вписанной окружности) равен $\angle OAB + \angle OBA = \angle 1 + \angle 2$ по теореме о внешнем угле треугольника. Следовательно, треугольник OBA_1 равнобедренный и $A_1B = A_1O$ --- искомый отрезок.



$\angle A_1B_1C_1 = 50^o$, $\angle A_1C_1B_1 = 70^o$, следовательно, $\angle B_1A_1C_1 = 60^o$. По теореме синусов

$\dfrac{B_1C_1}{\sin\angle B_1A_1C_1} = 2R$, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^o} = 2R$, $R = 1$. Далее,

$\angle A = \angle A_1B_1C_1 + \angle A_1C_1B_1 - \angle B_1A_1C_1 = 60^o$,

откуда $\angle 1 = 30^o$. Тогда

$A_1O = A_1B = 2 \cdot R \cdot \sin\angle 1 = 1$.

Ответ: 1.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Представлены основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования или имеется вычислительная ошибка или описка.	±	9
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца. При этом выполнена некоторая существенная часть задания.	+/2	6
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 5. (12 баллов)

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c таких, что $0 < a, b, c < 1$, выполнено следующее неравенство $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$.

<u>*Доказательство.*</u>

Сделаем замену: $a = \sin^2 x$, $b = \sin^2 y$, $c = \sin^2 z$, где $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$.

Тогда неравенство перепишется в виде:

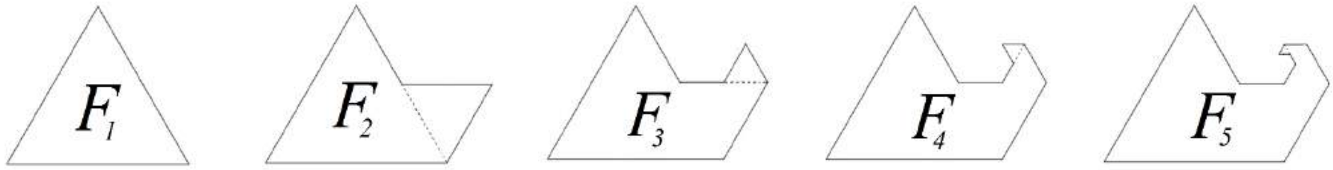
$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z < 1.$$

Но $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z < \sin x \sin y + \cos x \cos y = \cos(x-y) \leq 1$.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Представлены основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования.	±	9
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 6. (14 баллов)

Дана бесконечная последовательность многоугольников $F_1, F_2, F_3, F_4 \ldots$ Фигура F_1 – это равносторонний треугольник со стороной 1. Пятиугольник F_2 получается из треугольника F_1 построением на его стороне равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2}$, как показано на рисунке. Семиугольник F_3 получается из пятиугольника F_2 построением на его стороне длины $\frac{1}{2}$ равностороннего треугольника со стороной $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ и так далее. На каждом шаге строится треугольник, сторона которого в два раза меньше стороны треугольника, построенного на предыдущем шаге.



Докажите, что периметр каждой из рассматриваемых фигур не превышает 4.

Доказательство.

Заметим, что периметры данных фигур образуют следующую последовательность чисел:

$$p_1 = 3,$$

$$p_2 = 3 + \frac{1}{2},$$

$$p_3 = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$p_n = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, $p_n = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 4 - \frac{1}{2^{n-1}} < 4.$

Что и требовалось доказать.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	14
Представлены основные логические шаги решения. Представлена общая формула для периметров. В оценке для периметров отсутствуют некоторые обоснования или в решении имеется вычислительная ошибка или описка.	±	10
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца. При этом выполнена некоторая существенная часть задания. Представлена общая формула для периметров. Оценка для периметров отсутствуют.	+/2	7
Периметр произвольной фигуры представлен в виде суммы. Общая формула отсутствует. Оценка для периметров отсутствуют.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 7. (14 баллов)

Иван и Петр играют в следующую игру. Из кучки, которая содержит 2018 камней, они по очереди берут некоторое количество камней. Если перед ходом в кучке имеется N камней, то игрок может взять k камней, только если k является делителем числа N. Проигрывает тот игрок, который возьмет последний камень. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым берет камни Иван?

Решение

Покажем, что Иван имеет выигрышную стратегию. Для того, чтобы выиграть Ивану достаточно каждым ходом брать один камень.

В этом случае после его хода количество камней будет нечетным. Поскольку делители нечетного числа являются нечетными числами, то Петр должен будет взять нечетное число камней.

Так как перед ходом Ивана число камней четно, а он берет один камень, то Иван никогда не возьмет последний камень. В тоже время число камней конечно и не позже чем через 2018 ходов камней не останется. Следовательно, последний камень возьмет Петр.

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	16
Представлены основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования.	±	12
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца. При этом выполнена некоторая существенная часть задания.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении.	∓	4
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16

Задание 8. (16 баллов)

Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4 = 2031$.

Решение.

Заметим, что если число n четное, то n^4 делится на 16.

Если n нечетное, то число

$$n^4 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)$$

делится на 16.

Следовательно, остаток от деления на 16 левой части уравнения $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{14}^4$ равен количеству нечетных чисел в наборе x_1 , x_2 , ..., x_{14}, т.е. не превосходит 14. С другой стороны, 2031 имеет остаток 15 при делении 16, а значит равенство левой и правой частей невозможно.

Ответ: 0 (решений нет).

Содержание критерия	**Оценка**	**Баллы**
Полное решение.	+	16
Представлены основные логические шаги решения. В решении отсутствуют некоторые обоснования.	±	12
Найдена идея решения, но оно не доведено до конца. При этом выполнена некоторая существенная часть задания.	+/2	8
Решение в целом неверное или незаконченное, но содержит определенное продвижение в верном направлении. В частности, могут быть приведены оценки для x_1 , x_2 , …, x_{14} и выписан верный ответ.	∓	4
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		16