Всероссийская олимпиада школьников
«Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ЗАДАНИЯ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ОЧНЫЙ) ЭТАП

Математика 11 класс, 2016/2017 учебный год

Задание 1. (10 баллов)

Сколько существует натуральных чисел n таких, что уравнение $nx-12=3n$ имеет целочисленное решение.

Решение.

Поскольку $nx-12=3n \Rightarrow x=3+\dfrac{12}{n}$, то условие задачи выполняется, если 12 делится на n. Следовательно, n может принимать значения 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Ответ. 6

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	10
Приведены все основные логические шаги решения. Посчитаны целые значения n.	+/2	5
Приведены все основные логические шаги решения. Ответ неверный.		
Ответ верный. Решение отсутствует или неверное.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		10

Задание 2. (10 баллов)

Ниже нарисован магический квадрат, в котором некоторые числа отсутствуют.

20		
	17	
16		

Восстановите данный магический квадрат.

(В магическом квадрате суммы чисел, стоящих в каждой строке, в каждом столбце и на диагоналях, равны).

Решение.

1)

20		
	17	
16		

2)

20		x
	17	
16		

3)

20	13	x
x-3	17	
16		

4)

20	13	x
x-3	17	19
16	x+3	14

Следовательно, $20 + 17 + 14 = 16 + 17 + x \Rightarrow x = 18$.

Ответ:

20	13	18
15	17	19
16	21	14

<table>
<tr><th>Содержание критерия</th><th>Оценка</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>Полное решение.</td><td>+</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Приведен верный ответ.
Не показано, что других решений нет.</td><td rowspan="2">+/2</td><td rowspan="2">5</td></tr>
<tr><td>Приведены все основные логические шаги решения.
В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.</td></tr>
<tr><td>Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.</td><td>−/0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Максимальный балл</td><td>10</td></tr>
</table>

Задание 3. (12 баллов)

Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 20, а среднее арифметическое любых девяти из этих чисел не меньше 17. Найдите максимально возможное значение наибольшего из этих чисел.

Решение.

Упорядочим 10 данных чисел по возрастанию.
По условию задачи сумма первых 9 чисел не может быть меньше $9 \cdot 17 = 153$.
Следовательно, 10-е наибольшее число не может быть больше $20 \cdot 10 - 153 = 47$.
При этом набор 17, 17, …, 17, 47 удовлетворяет условию задачи.

Ответ. 47

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
Ответ верный. Показано, что максимально возможное значение не может быть больше 47. Не указан набор, который содержит 47.	+/2	6
Приведены все основные логические шаги решения. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.		
Ответ верный. Не показано, что 47 является максимально возможным значением.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 4. (12 баллов)

Числовая последовательность такова, что $x_n = \dfrac{n+2}{n\,x_{n-1}}$ для всех $n \ge 2$. Найдите произведение $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2016} x_{2017}$, если $x_1 = 1$.

Решение.

Заметим, что $x_n x_{n-1} = \dfrac{n+2}{n}$, следовательно,

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2016} x_{2017} = x_1 (x_2 x_3)(x_4 x_5) \ldots (x_{2016} x_{2017}) = 1 \frac{5}{3} \frac{7}{5} \ldots \frac{2017}{2015} \frac{2019}{2017} = 673$$

Ответ. 673

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	12
В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.	±	9

Показано в общем случае, что $x_n x_{n-1} = \dfrac{n+2}{n}$. Ответ неверный или отсутствует.	+/2	6
Показано при некоторых n, что $x_n x_{n-1} = \dfrac{n+2}{n}$. Ответ неверный или отсутствует.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 5. (12 баллов)

Когда Сергей пошел в кафе поужинать, в его кошельке были только банкноты в 1000 рублей. Он решил оставить официанту чаевые строго в размере от 5% до 15% от размера чека. Когда он получил чек, то понял, что не может осуществить задуманное, не получив сдачи. Найдите сумму наибольшего чека в рублях без учета копеек, который Сергей не может оплатить с учетом чаевых, используя только банкноты в 1000 рублей.

Решение.

Пусть x – сумма чека. Для того, чтобы Сергей не мог оплатить согласно условию задачи (банкнотами по 1000), должно выполняться $1.15x - 1.05x < 1000, \text{т. е.}\, x < 10000$. Так как $1.15 \cdot 10000 = 11500$, он сможет заплатить не более 11000 (включая чаевые). Следовательно, $x \leq \frac{11000}{1.15} < 9566$. Но так как $1.15 \cdot 9565 = 10999.75$, а $1.05 \cdot 9565 = 10043.25$, то наибольшая целая сумма чека 9565 руб.

Ответ. 9565 руб.

<table>
<tr><th>Содержание критерия</th><th>Оценка</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>Полное решение.</td><td>+</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Приведены все основные логические шаги решения. Приведены оценки сверху для искомой суммы чека. Доказана ее достижимость. В результате вычислительной ошибки или описки получен неверный ответ.</td><td>+.</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Найдена основная идея решения.
Доказано, что искомая сумма чека не может быть больше 9565.
Не показано, что чек в 9565 руб. не может быть оплачен согласно условию задачи.</td><td rowspan="2">±</td><td rowspan="2">9</td></tr>
<tr><td>Найдена основная идея решения.
Доказано, что искомая сумма чека не может быть больше 11000.
Отмечено, что искомая сумма чека не может быть больше 9565, но строгое доказательство этого факта отсутствует.</td></tr>
</table>

Показано, что чек в 9565 руб. не может быть оплачен согласно условию задачи.		
Найдена основная идея решения. Доказано, что искомая сумма чека не может быть больше 11000. Отмечено, что искомая сумма чека не может быть больше 9565, но строгое доказательство этого факта отсутствует. Не показано, что чек в 9565 руб. не может быть оплачен согласно условию задачи.	+/2	6
Решение незаконченное или неверное. Доказано, что искомая сумма чека не может быть больше 11000.	∓	2
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		12

Задание 6. (14 баллов)

Функция $f(x)$ такова, что $f\big(f(x)\big) = x$ и $f(f(x+2)+2) = x$ для любого x. Найдите $f(2017)$, если $f(0) = 1$.

<u>*Решение.*</u>

Из равенства $f(x) = f\big(f(f(x+2)+2)\big) = f(x+2)+2$ мы получаем формулу $f(x+2) = f(x) - 2$.

Кроме того, $f(1) = f\big(f(0)\big) = 0$.

Докажем по индукции, что $f(x) = 1 - x$ для любого целого x.

Вначале докажем, что указанное равенство верно при четных x.[1]

1) $f(0) = 1$ – верно.
2) Пусть $f(2n) = 1 - 2n$.
3) Докажем, что $f(2(n+1)) = 1 - 2(n+1)$

Действительно, $f(2(n+1)) = f(2n) - 2 = 1 - 2n - 2 = 1 - 2(n+1)$.

Теперь докажем, что указанное равенство верно при нечетных x.

1) $f(1) = 0$ – верно.
2) Пусть $f(2n+1) = 1 - (2n+1)$ при некотором.
3) Докажем, что $f(2(n+1)+1) = 1 - (2(n+1)+1)$

Действительно, $f(2(n+1)+1+2) = f(2n+1) - 2 = 1 - (2n+1) - 2 = 1 - (2(n+1)+1)$.

[1] Заметим, что в данном случае достаточно доказать, что $f(x) = 1 - x$ верно для любого нечетного x.

Следовательно, $f(2017) = 1 - 2017 = -2016$.

Ответ. – 2016.

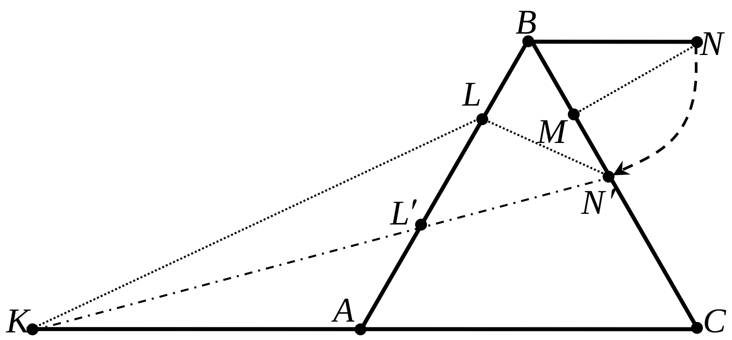
Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	14
Представлены все основные логические шаги решения. Доказано, что $f(x+2) = f(x) - 2$. В решении отсутствуют некоторые обоснования. Ответ верный.	±	11
Выписаны несколько первых значений последовательности $f(n)$. Делается предположение, что $f(x) = 1 - x$, но доказательство данного факта не приводится. Ответ верный.	+/2	7
Отмечено, что $f(x) = 1 - x$. Обоснования, а также частные подтверждения данного факта не приводятся. Ответ верный.	∓	3
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14

Задание 7. (14 баллов)

Дан правильный треугольник ABC со стороной 2. Точка K лежит на продолжении стороны AC за точку A, точка N лежит на прямой, параллельной прямой AC и проходящей через точку B, причем $|AK| = 2$, $|BN| = 1$. Рассматриваются такие ломаные $KLMN$, что точка L лежит на стороне AB, точка M лежит на стороне BC, а отрезок LM параллелен стороне AC. Найдите наименьшее возможное значение суммы $|KL| + |MN|$, если $|AN| > |CN|$.

Решение.

Повернем отрезок BN на 60° относительно точки B так, чтобы точка N перешла в середину стороны BC, на рисунке это точка N'. Тогда отрезок MN перейдет в отрезок LN'.



Таким образом, сумма $|KL|+|MN|$ равна длине ломанной KLN'. Это ломаная будет иметь наименьшую длину, если точка L лежит на прямой KN'. По теореме косинусов находим, что $\left(|KL|+|MN|\right)_{\min}=|KN'|=\sqrt{4^2+1^2-2\cdot1\cdot4\cdot\cos60^\circ}=\sqrt{13}$.

Ответ. $\sqrt{13}$

<table>
<tr><th>Содержание критерия</th><th>Оценка</th><th>Баллы</th></tr>
<tr><td>Полное решение.</td><td>+</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Представлены все основные логические шаги решения.
Допущена вычислительная ошибка.</td><td>+.</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Приведена верная схема решения. Описан, но неверно реализован, поворот отрезка BN. Получен неверный ответ.</td><td rowspan="2">±</td><td rowspan="2">11</td></tr>
<tr><td>Задача сведена к задаче на нахождение наибольшего значения функции: сумма $|KL|+|MN|$ представлена как функция некоторой переменной. При решении последней задачи допущены ошибки в преобразованиях и/или при нахождении производной.
Получен неверный ответ.</td></tr>
<tr><td>Задача сведена к задаче на нахождение наибольшего значения функции: сумма $|KL|+|MN|$ представлена как функция некоторой переменной. Решение полученной задачи отсутствует.</td><td>+/2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.</td><td>−/0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Максимальный балл</td><td>14</td></tr>
</table>

Задание 8. (16 баллов)

Два игрока по очереди выкладывают монеты в ряд. За один ход можно положить две или три монеты. Выигрывает тот, кто выложит 16 монету. Определите, какой игрок (первый или второй) обладает стратегией, которая позволит ему выиграть вне зависимости от ходов другого игрока. Опишите эту стратегию.

Решение.

Выигрышной стратегией обладает первый игрок. Для этого ему первым ходом нужно положить 2 монеты, а следующими ходами класть столько монет, чтобы сумма его монет и монет, положенных перед этим вторым игроком была равна 5. В этом случае после третьего хода первого игрока в ряду будут лежать 12 монет. Далее, как бы не сходил второй игрок своим третьим ходом и как бы после этого не сходил первый игрок 16 монета будет положена первым игроком.

Содержание критерия	Оценка	Баллы
Полное решение.	+	16

Используя перебор, описана выигрышная стратегия для первого игрока. Представлен полный перебор случаев, но не обосновано, что все случаи рассмотрены.	±	12
Используя перебор, описана выигрышная стратегия для первого игрока. Представлен неполный перебор случаев.	+/2	8
Указано, что выигрышной стратегией обладает первый игрок и, что первым ходом он должен положить 2 монеты. Доказательство этого факта не приводится. На частном примере показано, что данная стратегия приводит к выигрышу первого игрока.	∓	4
Решение не соответствует ни одному критерию, описанному выше.	−/0	0
Максимальный балл		14