Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 11 класс

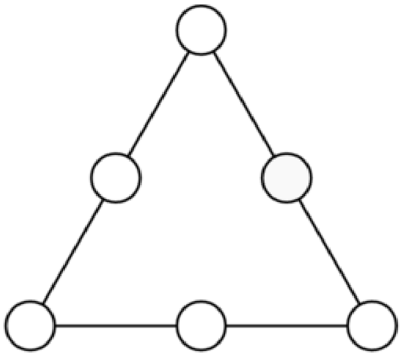
Заключительный (очный) этап 2015/2016 учебный год

РЕШЕНИЕ

Задание 1. (10 баллов)

Шесть последовательных натуральных чисел от 10 до 15 вписаны в круги на сторонах треугольника таким образом, что суммы трех чисел на каждой из сторон равны.

Какое максимальное значение может принимать эта сумма?



Решение.

Пусть a, b, c, d, e, f – указанные числа, записанные в порядке их следования в кругах при обходе по часовой стрелке и числа a, c, e располагаются в вершинах треугольника. Если S – рассматриваемая сумма, то имеем

$$\begin{cases} a+b+c=S, \\ c+d+e=S, \\ e+f+a=S. \end{cases}$$

Складывая все уравнения данной системы получаем,

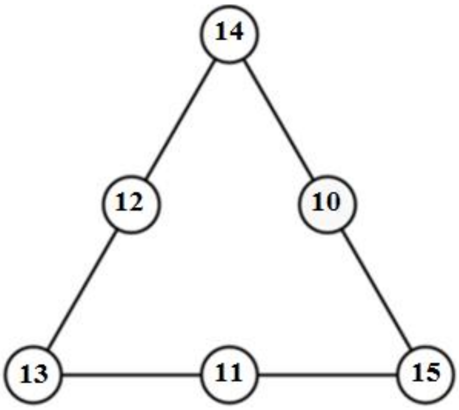
$$(a+b+c+d+e+f)+a+c+e=3S \quad \Rightarrow$$

$$(10+11+12+13+14+15)+a+c+e=75+a+c+e=3S \quad \Rightarrow.$$

$$S=25+\frac{a+c+e}{3}.$$

Следовательно, число S не может быть больше числа $25+\dfrac{15+14+13}{3}=39.$

Рисунок ниже показывает, что число S может быть равно 39.



<u>Ответ:</u> 39.

Задание 2. (10 баллов)

Найти значение параметра p, при котором уравнение $px^2 = |x-1|$ имеет ровно три решения.

Решение

Заметим, что при $p< 0$ данное уравнение не имеет решения, а при $p= 0$ – имеет единственное решение $x = 1$. Следовательно, $p>0$.

Данное уравнение будет иметь три корня, если парабола $y = px^2$ имеет ровно три общие точки с «уголком» $y = |x-1|$. Поскольку левая ветвь «уголка» при $p>0$ пересекает параболу ровно в двух точках, то правая ветвь должна касаться параболы.

Последнее выполняется тогда и только тогда, когда уравнение $px^2 = x-1$ имеет ровно одно решение, то есть когда

$$D = 1-4p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{4}$$

<u>**Ответ**</u>: $p = \dfrac{1}{4}$.

Задание 3. (12 баллов)

Егоров решил открыть накопительный вклад для покупки автомобиля стоимостью 900000 руб. Начальная сумма вклада равна 300000 руб. Через месяц и далее ежемесячно Егоров планирует пополнять свой вклад на 15000 руб. Банк начисляет ежемесячно проценты по ставке 12% годовых. Начисленные за месяц проценты перечисляются на вклад, и в следующем месяце на них также начисляются проценты. Через какое наименьшее число месяцев на вкладе будет сумма достаточная для покупки автомобиля?

Решение

Пусть S_n – сумма вклада через n месяцев после начисления процентов и после внесения дополнительных взносов D (15000 руб.).

Так как в месяц банк начисляет 1%, то

$$S_1 = 300000(1+0,01)+D,$$

$$S_2 = S_1(1+0,01)+D = (S_0(1+0,01)+D)(1+0,01)+D = S_0(1+0,01)^2 + D\big(1+(1+0,01)\big)$$

$$S_3 = S_2(1+0,01) = (S_0(1+0,01)^2 + D(1+0,01)+D)(1+0,01)+D =$$

$$= S_0(1+0,01)^3 + D\big((1+0,01)^2+(1+0,01)+1\big)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_n = S_0(1+0,01)^n + D\big((1+0,01)^{n-1}+(1+0,01)^{n-2}+\ldots+(1+0,01)+1\big)$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии получаем

$$(1+0,01)^{n-1}+(1+0,01)^{n-2}+\ldots+(1+0,01)+1 = \frac{1,01^n-1}{1,01-1} = \frac{1,01^n-1}{0,01}.$$

Следовательно, $S_n = S_0(1+0,01)^n + D\dfrac{1,01^n-1}{0,01}$.

Искомое число месяцев удовлетворяет неравенству

$$300000\cdot 1,01^n + 15000\frac{1,01^n-1}{0,01} \ge 900000 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cdot 1,01^n + 15(1,01^n-1) \ge 9 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 18\cdot 1,01^n \ge 24 \quad \Leftrightarrow \quad 1,01^n \ge \frac{24}{18} \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 28,91$$

Таким образом, достаточная для покупки автомобиля сумма будет на вкладе через 29 месяцев.

Ответ:29.

Задание 4. (12 баллов)

Решите уравнение $(x+2)^4+x^4=82$.

Решение

Пусть $y=x+1$, тогда получаем

$$(y+1)^4+(y-1)^4=82 \Leftrightarrow y^4+6y^2-40=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=-10 \\ y^2=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1=-3;\ x_2=1$.

Задание 5. (12 баллов)

Код сейфа состоит из пяти идущих подряд цифр. Василий Петрович положил деньги в сейф, а когда захотел их забрать, выяснилось, что он забыл код. Он только помнил, что в коде были числа 21 и 16. Какое наименьшее количество пятизначных номеров необходимо перебрать, чтобы наверняка открыть сейф?

Решение

Рассмотрим несколько случаев.

1. Код содержит комбинацию цифр 216. Ее можно расположить в коде тремя способами: **216, *216* или 216**. В каждом из этих возможных кодов каждую из остальных цифр можно выбрать 10 способами.

Таким образом, получается$3\cdot 100=300$ вариантов.

2. Код содержит комбинации 21 и 16, причем комбинация 21 расположена левее. Тогда оставшуюся цифру можно выбрать 10 способами и поставить ее на одно из трех мест. То есть 30 вариантов.

3. Код содержит комбинации 21 и 16, причем комбинация 21 расположена правее. Аналогично - 30 вариантов.

Заметим, что числа 21621, 21216, 21616, 16216 мы посчитали дважды.

Таким образом, чтобы открыть сейф достаточно перебрать 300+30+30-4=356 номеров.

Ответ: 356

Задание 6. (14 баллов)

Конечная последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_N$ обладает следующим свойством:

$$x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}} \text{ для всех } 1 \le n \le N-2.$$

Найдите максимально возможное число членов данной последовательности, если $x_1 = 20;\ x_2 = 16.$

Решение

Последовательность будет иметь максимальное число членов, если последний ее член будет равен нулю. Иначе эту последовательность можно продолжить.

Для всех $1 \le n \le N-2$ имеем

$$x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+2} \cdot x_{n+1} = x_{n+1} \cdot x_n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} \cdot x_n = x_{n+2} \cdot x_{n+1} + 1.$$

Пусть $x_N = 0$, тогда

$$x_{N-1} \cdot x_{N-2} = x_N \cdot x_{N-1} + 1 = 1;$$

$$x_{N-2} \cdot x_{N-3} = x_{N-1} \cdot x_{N-2} + 1 = 1 + 1 = 2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots....$$

$$x_3 \cdot x_2 = (N-4) + 1 = N - 3;$$

$$x_2 \cdot x_1 = (N-3) + 1 = N - 2 = 20 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad N = 20 \cdot 16 + 2 = 322.$$

Ответ:322.

Задание 7. (14 баллов)

Несколько бизнесменов решили открыть фирму и делить всю прибыль на равные части. Одного из бизнесменов назначили директором. Однажды этот директор фирмы перевел часть прибыли со счета фирмы на свой собственный счет. Эта часть денег была втрое больше, чем часть каждого из остальных, если бы они разделили остаток прибыли между собой поровну. После этого директор покинул фирму. Следующий директорфирмы, один из оставшихся бизнесменов,сразу же поступил точно также, как и предыдущий и т.д. В конце концов, предпоследний директор фирмы перевел на свой собственный счет часть прибыли, которая также была в три раза больше, чем осталось у последнего бизнесмена. В результате этих распределений доходов последний бизнесмен получил денег в 190 раз меньше, чем первый директор фирмы. Сколько бизнесменов открыли эту фирму?

Решение.

Пусть n – количество бизнесменов и d_i – прибыль i-го директора, $i = 1, \ldots, n$.

По условию $d_i = 3\dfrac{d_{i+1} + d_{i+2} + \ldots + d_n}{n-i}$. Тогда

$$d_{i-1} = 3\frac{d_i + d_{i+1} + \ldots + d_n}{n-i+1} = 3\frac{3\dfrac{d_{i+1} + d_{i+2} + \ldots + d_n}{n-i} + d_{i+1} + \ldots + d_n}{n-i+1} =$$

$$= 3\frac{(n-i+3)(d_{i+1} + d_{i+2} + \ldots + d_n)}{(n-i)(n-i+1)}.$$

Таким образом, $\dfrac{d_{i-1}}{d_i} = \dfrac{n-i+3}{n-i+1}, \quad i = 2, \ldots, n.$

Перемножая эти равенства, получим

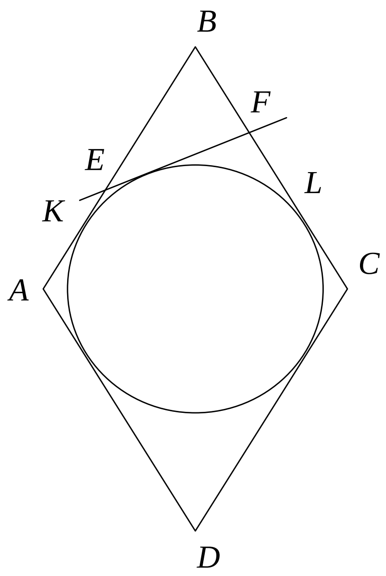
$$\frac{d_1}{d_n} = \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{d_2}{d_3} \cdot \ldots \cdot \frac{d_{n-1}}{d_n} = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

По условию $\dfrac{d_1}{d_n} = 190$, то есть $(n+1)n = 380$, откуда $n = 19$.

<u>**Ответ**</u>: 19.

Задание 8. (16 баллов)

Касательная l к окружности, вписанной в ромб, пересекает его стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Докажите, что произведение $AE{\cdot}FC$ не зависит от выбора касательной l.



Решение.

Пусть

$$q = BK,\ p = AK,\ x = EK,\ y = FL$$

(K и L – точки касания вписанной окружности со сторонами AB и BC) и $\alpha = \angle ABC$.

Докажем, что $AE \cdot FC = (p + x)(p + y)$ не зависит от x и y.

Рассмотрим треугольник EBF, в котором

$$EB = q - x, BF = q - y, EF = x + y.$$

По теореме косинусов

$(x + y)^2 = (q - x)^2 + (q - y)^2 - 2(q - x)(q - y)\cos\alpha,$

откуда

$$xy = (q^2 - xq - yq)\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $p = q\ \text{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, получаем

$$AE \cdot FC = p^2 + p(x + y) + xy = p^2 + q^2\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$