Всероссийская олимпиада школьников «Миссия выполнима. Твое призвание-финансист!»

ПО МАТЕМАТИКЕ 10 класс

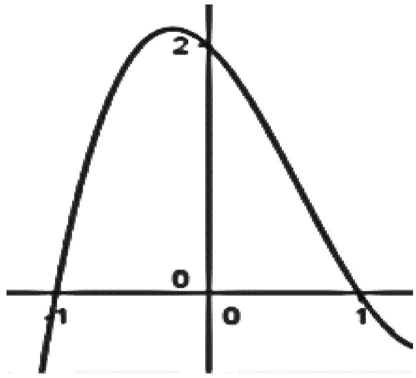
Заключительный (очный) этап 2015/2016 учебный год

Решение

Задание 1. (10 баллов)

На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Найдите значение параметра b.



Решение.

Из рисунка следует

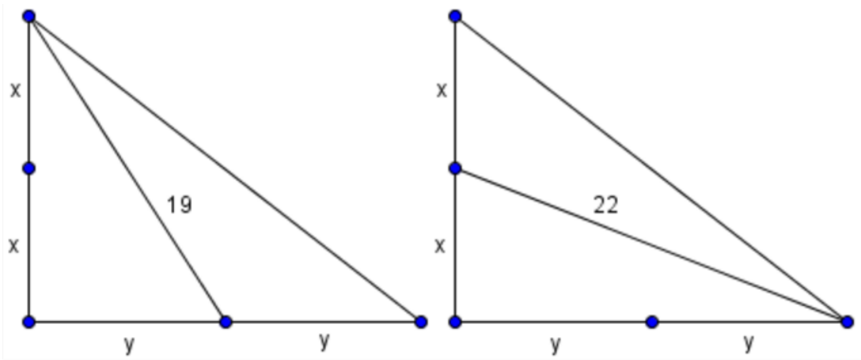
$$\begin{cases} -f(-1) = a - b + c - d = 0 \\ f(1) = a + b + c + d = 0 \\ f(0) = d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + d = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow b = -2.$$

Ответ: -2.

Задание 2. (10 баллов)

В прямоугольном треугольнике ABC(угол C – прямой) проведены медианы AMи BN, длины которых равны 19 и 22 соответственно. Найдите длину гипотенузы данного треугольника.

Решение.



Пусть AC= 2x, а BC= 2y. По теореме Пифагора имеем

$$\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = 19^2 \\ x^2 + (2y)^2 = 22^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 5x^2 + 5y^2 = 19^2 + 22^2 = 845 \quad \Rightarrow$$

$$BC^2 = 4x^2 + 4y^2 = 4 \cdot 169 \quad \Rightarrow \quad BC = 26.$$

Ответ: 26.

Задание 3. (12 баллов)

Бухгалтеры, менеджеры и экономисты банка сидят за круглым столом. Когда директор попросил поднять руку бухгалтеров, рядом с которыми сидит экономист, руку подняли 20 человек. А когда директор попросил поднять руку менеджеров, рядом с которыми сидит экономист, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку сидит сразу два экономиста.

Решение

Назовем группой экономистов несколько (возможно, одного) экономиста, сидящих подряд, слева и справа от которых сидят представители других профессий. При этом если нет менеджера или бухгалтера, рядом с которым сидят два экономиста, то каждый человек поднял руку не более одного раза, а тогда общее количество поднявших руку людей равно удвоенному количеству групп, т.е. четно. А по условию их 45. Противоречие.

Задание 4. (12 баллов)

Решите уравнение $x^2+y^2+1=xy+x+y$.

Решение

$$x^2+y^2+1=xy+x+y \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x=y=1.$$

Ответ: $x=y=1$.

Задание 5. (12 баллов)

Известно, что $5a+3b+2c=0$ и $a\neq 0$. Докажите, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня.

Решение.

Данное в условии равенство можно переписать в виде:

$$5\mathrm{a}+3\mathrm{b}+2\mathrm{c}=0 \Leftrightarrow \mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+4\mathrm{a}+2\mathrm{b}+\mathrm{c}=0\ .$$

А это равенство запишем в виде $f(1)+f(2)=0$, где $f(x)=ax^2+bx+c$.

Таким образом, либо $f(1)=f(2)=0$ и числа 1 и 2 являются корнями данного уравнения, либо эти значения имеют разные знаки, что также означает, что график функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух различных точках.

Задание 6. (14 баллов)

Определите знак числа

$$A=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}.$$

Знаки расставлены так: “+” перед первой дробью, затем идут два“–” и два “+” по очереди. Перед последней дробью стоит“+”.

Решение

Разобьем все числа на группы по четыре числа:

$$\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right).$$

Сумма чисел в каждой группе положительная:

$$\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+2}>\frac{1}{4k+3}-\frac{1}{4k+4} \Leftrightarrow \frac{1}{(4k+1)(4k+2)}>\frac{1}{(4k+3)(4k+4)}.$$

Следовательно, и число *A* положительное.

Ответ: $A > 0$

Задание 7. (14 баллов)

Обнаружилось, что на закрытии торгов курс акций некоторой компании в течении года каждый раз увеличивался или уменьшался ровно на *n* % по отношению к предыдущему закрытию. Существует ли такое натуральное значение n, при котором цена акций на закрытии торгов в течении года дважды принимала одно и то же значение?

Решение.

После *k* увеличений цены и *l* уменьшений цены на *n* % цена будет такой:

$$P\left(1+\frac{n}{100}\right)^{k}\left(1-\frac{n}{100}\right)^{l},$$

где *P* – начальная цена акций. Если предположить, что цена дважды принимает одно и то же значение, что получится

$$\left(1+\frac{n}{100}\right)^{k}\left(1-\frac{n}{100}\right)^{l}=1$$

или

$$(100+n)^{k}(100-n)^{l}=100^{k+l}.$$

Правая часть этого равенства делится на 10, поэтому и n должно быть кратно 10. Предположим, что n не кратно 4, тогда $100\pm n$ тоже не кратно 4, поэтому левая часть кратна 2^{k+l}и не кратна 2^{k+l+1}, а правая часть делится на 4^{k+l}. Получили противоречие. Следовательно, *n* кратно 4. Аналогично, можно показать, что *n* кратно 25. Поэтому *n* делится на 100, что невозможно, поскольку цена не может уменьшиться более, чем на 100%.

Ответ: не существует.

Задание 8. (16 баллов)

Пусть все фирмы страны имеют определенный ранг, который является натуральным числом. При слиянии двух фирм рангов m и n получается новая фирма ранга $(m + n)$. Прибыль полученной фирмы будет на $m \cdot n$ больше суммы прибылей фирм ее образующих. Прибыль фирмы первого ранга равна 1 д.е. Существует ли ранг, при котором прибыль фирмы будет равна 2016 д.е.?

Решение.

Пусть p_n – прибыль фирмы ранга n. Тогда по условию задачи

$$p_{m+n} = p_m + p_n + mn.$$

Заметим, что для любого n

$$p_n = p_{n-1} + p_1 + (n-1) \cdot 1 = p_{n-1} + 1 + n - 1 = p_{n-1} + n.$$

Докажем, что $p_n = 1 + 2 + \ldots + n$.

Используем метод математической индукции.

1) База индукции: $p_1 = 1$.

2) Пусть $p_k = 1 + 2 + \ldots + k$. Докажем, что $p_{k+1} = 1 + 2 + \ldots + k + (k+1)$.

Действительно, $p_{k+1} = p_k + (k+1) = (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1)$.

Следовательно, $p_n = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Для того, чтобы фирма имела прибыль равную 2016 д.е., ее ранг должен удовлетворять равенству

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2016.$$

Последнее уравнение имеет натуральное решение $n = 63$.

<u>Ответ:</u> да, это ранг равный 63.