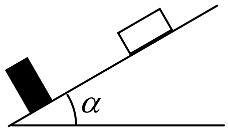
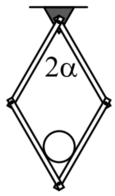
2.1. Олимпиада им. И.В.Савельева (отборочный тур олимпиады «Росатом»), 11 класс



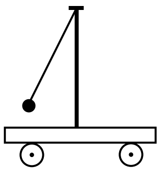
1. На наклонной плоскости с углом наклона α находится маленькое тело. На расстоянии l от тела находится упругая стенка. Коэффициент трения между телом и плоскостью k ($k < \mathrm{tg}\,\alpha$). Тело отпускают. Какой путь пройдет тело к моменту его полной остановки. Столкновения тела со стенкой упругие.

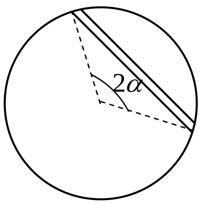
2. Однородно заряженную пластинку с площадью S помещают во внешнее электрическое поле, перпендикулярное пластинке. В результате с одной стороны от пластинки возникло электрическое поле с напряженностью E, с другой - $2E$, причем векторы напряженностей направлены от пластинки. Найти силу, которая действует на пластинку со стороны внешнего поля.

3. В сосуде объема V находится смесь водорода и гелия под давлением p. Когда к сосуду подвели количество теплоты Q в процессе с $V = const$, давление смеси стало равно $1{,}1p$. Найти отношение количества вещества водорода и гелия в смеси. Внутренняя энергия одного моля водорода и гелия при рассматриваемых температурах определяется формулами $(5/2)RT$ и $(3/2)RT$.



4. Четыре невесомых гладких стержня длиной l соединены шарнирно в виде ромба, который подвешен за одну из вершин к потолку. Между стержнями расположили однородный цилиндр массой m; в равновесии угол между стержнями равен 2α (см. рисунок). Найти радиус цилиндра и силу, действующую в нижнем шарнире.





5. На тележке укреплен математический маятник длины l. Тележку отпускают в туннель, прокопанный внутри Земли по хорде, опирающейся на угол 2α ($\alpha = \arcsin(1/3)$). Сколько колебаний совершит маятник за то время, когда тележка пройдет весь туннель. Радиус Земли R известен.

Ответы и решения

1. Поскольку $k < \mathrm{tg}\,\alpha$, то тело будет скользить по плоскости и окончательно остановится только около стенки. При этом, несмотря на подъемы и спуски по плоскости, работа силы тяжести будет равна убыли потенциальной энергии тела, т.е. $A_m = mgl\sin\alpha$. Из теоремы об изменении кинетической энергии заключаем, что эта работа равна минус работе силы трения, которая определяется пройденным телом путем $A_{mp} = -F_{mp}S = -kmg\cos\alpha S$.

$$S = \frac{1}{k} l\ \mathrm{tg}\,\alpha$$

2. По принципу суперпозиции электрическое поле есть сумма внешнего поля и поля пластинки. Имеем

$$E_{пл} + E_{вн} = 2E$$
$$E_{пл} - E_{вн} = E$$

где $E_{вн}$ и $E_{пл}$ - напряженности внешнего электрического поля и поля зарядов пластинки. Из этой системы уравнений находим

$$E_{вн} = \frac{E}{2}; \qquad E_{пл} = \frac{3E}{2} \tag{1}$$

Поскольку поле пластинки есть

$$E_{пл} = \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \tag{2}$$

где Q - заряд пластинки, из (1), (2) находим ее заряд (который, очевидно, является положительным)

$$Q = 3\varepsilon_0 SE$$

и силу, действующую на пластинку со стороны внешнего поля

$$F = QE_{вн} = \frac{3}{2}\varepsilon_0 SE^2$$

Направлена эта сила туда же, куда и вектор напряженности поля с той стороны от пластинки, где поле больше.

3. Поскольку процесс изохорический

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}\nu_{He} R\Delta T + \frac{5}{2}\nu_{H_2} R\Delta T = \frac{R\Delta T}{2}\left(3\nu_{He} + 5\nu_{H_2}\right) \tag{1}$$

где ν_{He} и ν_{H_2} - количества вещества гелия и водорода в смеси, ΔT - изменение температуры смеси. Закон дальтона для смеси дает для изменения давления смеси

$$\Delta p = 0{,}1p = \frac{\nu_{He} R\Delta T}{V} + \frac{\nu_{H_2} R\Delta T}{V} = \frac{R\Delta T}{V}\left(\nu_{He} + \nu_{H_2}\right).$$

Отсюда

$$R\Delta T = \frac{0{,}1pV}{\nu_{He} + \nu_{H_2}}$$

Подставляя это выражение в (1), получим

$$\frac{20Q}{pV} = \frac{3\nu_{He} + 5\nu_{H_2}}{\nu_{He} + \nu_{H_2}}$$

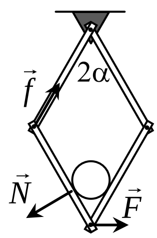
Отсюда находим

$$\frac{\nu_{H_2}}{\nu_{He}} = \frac{20Q - 3pV}{5pV - 20Q}$$

Поскольку отношение количества молей водорода и гелия – величина положительная, для данных в условии задачи величин должно быть выполнено неравенство

$$3pV < 20Q < 5pV$$

4. Из условия равновесия цилиндра заключаем, что сила реакции между цилиндром и нижними стержнями определяется соотношением



$$N = \frac{mg}{2\sin\alpha}$$

Из условия равновесия верхних стержней следует, что силы, действующие на них со стороны нижних стержней, могут быть направлены только вдоль верхних стержней (см. рисунок; на рисунке символом $\vec{f}$ обозначена сила, действующая на левый нижний стержень со стороны левого верхнего). Рассмотрим теперь равновесие левого нижнего стержня. Из условия моментов относительно нижнего шарнира получаем

$$NR\,\mathrm{ctg}\,\alpha = fl\sin 2\alpha \qquad (1)$$

С другой стороны из симметрии задачи следует, что сила, действующая со стороны правого нижнего стержня на левый нижний может быть направлена только горизонтально (см. рисунок сила, действующая со стороны правого нижнего стержня на левый нижний, обозначена как F). Поэтому условие сил для левого нижнего стержня в проекциях на вертикальную ось дает

$$f\cos\alpha = N\sin\alpha$$

Теперь из формулы (1) находим радиус цилиндра

$$R = \frac{2l\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$$

а из проекции условия сил для левого нижнего стержня на горизонтальное направление – силу в нижнем шарнире

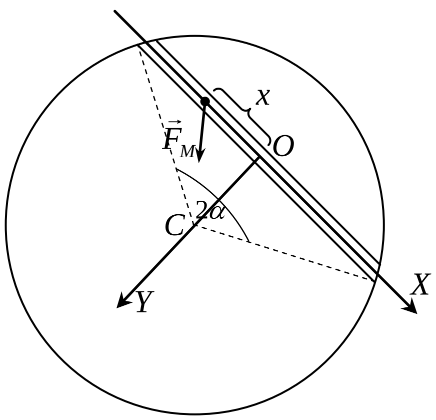
$$F = mg\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$$

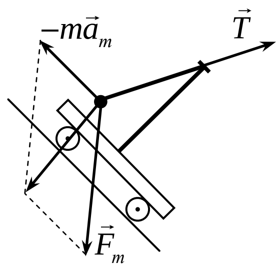
5. Как известно, на тело, находящееся внутри Земли на расстоянии r от ее центра, действует направленная к центру Земли сила тяжести

$$F_M = \frac{Mgr}{R}$$

где Mg - сила тяжести, действующая на тело на поверхности Земли, R - радиус Земли. Применяя второй закон Ньютона к тележке, найдем, что ее ускорение a_m направлено вдоль туннеля и равно по величине

$$a_M = \frac{F_{M,x}}{M} = \frac{gr_x}{R} \qquad (1)$$





где F_x - проекция силы тяжести на ось OX , направленную вдоль туннеля (см. рисунок), M - масса тележки. Но $r_x = x$. Поэтому из уравнения (1) следует, что ускорение тележки пропорционально расстоянию от нее до точки O (ближайшей к центру точки туннеля); это значит, что тележка (вместе с маятником на ней) будет совершать гармонические колебания относительно точки O с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{2}$$

Следовательно, до противоположной точки туннеля тележка доедет за половину периода (2)

$$t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{3}$$

Рассмотрим теперь второй закон Ньютона для маятника. Он имеет обычный вид

$$m\vec{a}_m = \vec{F}_m + \vec{T}$$

где $\vec{T}$ - сила натяжения нити. Однако, чтобы найти количество колебаний маятника в системе отсчета, связанной с тележкой, нужно найти его ускорение относительно тележки $\vec{a}_{м.о.т.}$. Используя далее, закон, аналогичный закону сложения скоростей (но для ускорений), получим

$$m\vec{a}_{м.о.т.} = \vec{F}_m + \vec{T} - m\vec{a}_M \tag{4}$$

(для знакомых с понятием сил инерции отметим, что уравнение (4) является вторым законом Ньютона в неинерциальной системе отсчета, связанной с тележкой, а $-m\vec{a}_M$ и есть действующая на маятник сила инерции). Но с учетом (1) величина $m\vec{a}_M$ есть проекция действующей на маятник силы тяжести на ось x, поэтому вектор $\vec{F}_m - m\vec{a}_M$ направлен перпендикулярно туннелю, а его величина равна проекции силы тяжести на ось OY, перпендикулярную туннелю. Поэтому модуль этого вектора равен

$$\left|\vec{F}_m - m\vec{a}_M\right| = \frac{mgr_y}{R} = \frac{mg\,OC}{R} = mg\cos\alpha \tag{5}$$

и не меняется в процессе движения тележки по туннелю. Из уравнений (4)-(5) следует, что уравнение для ускорения маятника относительно тележки совпадает с уравнением для ускорения математического маятника, но в качестве «силы тяжести» в нем фигурирует постоянная сила $mg\sin\alpha$. А это значит, что маятник будет совершать колебания с периодом

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$$

Поэтому за время t (3) маятник совершит следующее количество колебаний

$$N = \frac{t}{T} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R\cos\alpha}{l}}$$