

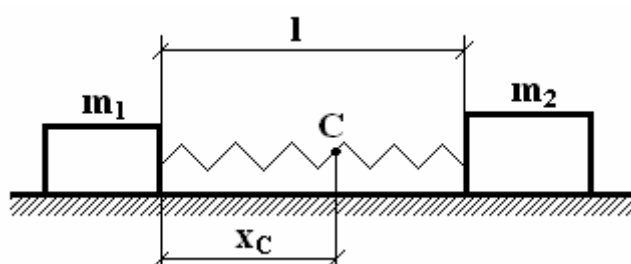
ЗАДАНИЯ И РЕШЕНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА

29 января 2012г.

11 КЛАСС

Задача 11.1. Два груза массами m_1 и m_2 соединены пружиной длиной l и жесткостью k и находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Найти период малых колебаний системы.

Решение:



Колебания грузов происходят около центра масс. Его координата

$$x_C = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Жесткость пружины **обратно** пропорциональна ее длине. Поэтому

$$k = \frac{a}{l}, \quad k_1 = \frac{a}{x_C}, \quad k_2 = \frac{a}{l - x_C}, \quad (2)$$

где a – коэффициент пропорциональности.

Из (2) находим

$$k_1 = k \frac{m_1 + m_2}{m_2}, \quad k_2 = k \frac{m_1 + m_2}{m_1}. \quad (3)$$

Периоды колебаний грузов одинаковы

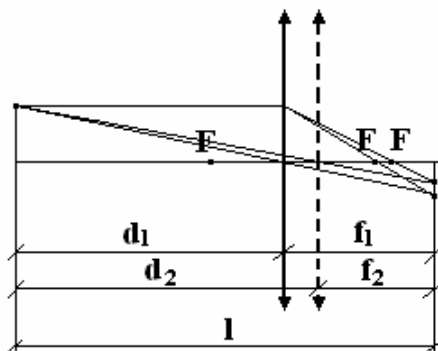
$$T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}. \quad (4)$$

Критерии оценки.

Координата центра масс	3 балла
Формула жесткости	2 балла
Получение формул (3)	2 балла
Расчетная формула	3 балла

Задача 11.2. Перемещая линзу между экраном и предметом, удается получить два четких изображения размерами h' и h'' . Какой размер h имеет предмет?

Решение:



По определению $l = d + f$. (1)

Формула линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$. (2)

Из (1) и (2) находим $d^2 - ld + Fl = 0$. (3)

Откуда:

$$d_{1,2} = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - Fl}. \quad (4)$$

$$d_1 = \frac{l}{2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - Fl}. \quad (5)$$

$$d_2 = \frac{l}{2} - \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - Fl}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует

$$d_1 + d_2 = l. \quad (7)$$

С другой стороны

$$d_1 + f_1 = l. \quad (8)$$

$$d_2 + f_2 = l. \quad (9)$$

Из (7) – (9) находим

$$d_1 = f_2. \quad (10)$$

$$d_2 = f_1. \quad (11)$$

Из подобия треугольников

$$\frac{h_1}{h} = \frac{f_1}{d_1}. \quad (12)$$

$$\frac{h_2}{h} = \frac{f_2}{d_2} \quad (13)$$

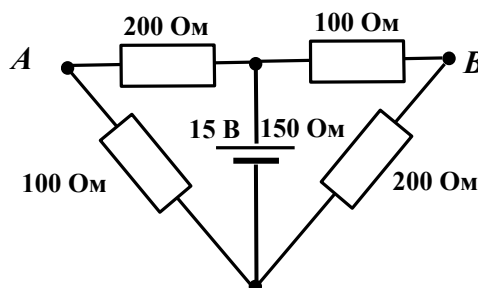
Из (12) и (13) с учетом (10) и (11) находим

$$h_1 h_2 = h^2 \text{ или } h = \sqrt{h_1 h_2} .$$

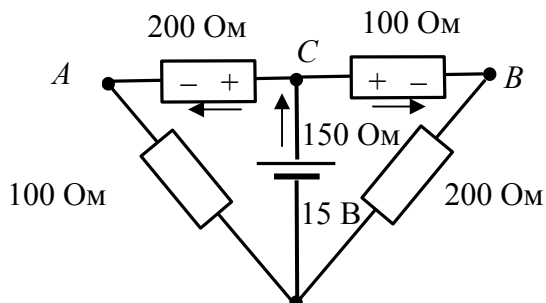
Критерии оценки.

Формула линзы	2 балла
Составление квадратного уравнения	3 балла
Решение уравнения	3 балла
Конечная формула	2 балла.

Задача 11.3. Чему равна разность потенциалов между точками А и В ($\varphi_A - \varphi_B$) в схеме, изображенной на рисунке? ЭДС источника 15 В, его внутреннее сопротивление 150 Ом. Сопротивления резисторов указаны на схеме.



Решение:



Принимая во внимание величины сопротивлений, делаем вывод, что общее сопротивление внешней цепи равно 150 Ом, а ток через источник равен $\frac{15}{150+150} = 0,05$ А. Этот ток делится в т. С на два равных тока по 0,025 А, текущих в противоположных направлениях через верхние резисторы 200 Ом и 100 Ом, создавая на них падения напряжения 5 В и 2,5 В соответственно. Т.о. $\varphi_A - \varphi_C = -5$ В, а $\varphi_C - \varphi_B = 2,5$ В. Поэтому $\varphi_A - \varphi_B = -5+2,5 = -2,5$ В.

Критерии оценки.

Расчет полного сопротивления	2 балла
Закон Ома	2 балла
Ток пополам	2 балла
Разность потенциалом между точками А и С, С и В	2 балла
Разность потенциалом между точками А и В	2 балла

Задача 11.4. Два маленьких металлических шарика с одинаковыми зарядами 6мКл. Шарики привели в соприкосновение и развели на прежнее расстояние. Как изменилась сила взаимодействия шариков, если радиус одного из них вдвое больше радиуса другого?

Решение:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{kq_1'q_2'}{r^2} = \frac{q_1'q_2'}{q_1q_2}$$

После соприкосновения равные заряды на шариках перераспределяются:

$$\varphi_1' = \varphi_2' \Rightarrow \frac{kq_1'}{r_1} = \frac{kq_2'}{r_2} \Rightarrow \frac{q_1'}{r_1} = \frac{q_2'}{2r_1} \Rightarrow q_2' = 2q_1'$$

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2' = q_1' + 2q_1' = 3q_1' = 12 \text{ мКл};$$

$$q_1' = 4 \text{ мКл}; \quad q_2' = 8 \text{ мКл}.$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{q_1'q_2'}{q_1q_2} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

Критерии оценки.

Закон Кулона	2 балла
Отношение сил	2 балла
Критерий перераспределения зарядов	2 балла
Новые заряды	2 балла
Расчет и вывод	2 балла

Задача 11.5. Протон и α -частица влетают с одинаковой скоростью V в однородное магнитное поле B перпендикулярно его направлению и вращаются вокруг общего центра. Каково расстояние между частицами. Взаимодействием частиц пренебречь.

Решение.

$$l = R_2 - R_1 \quad R_2 = \frac{m_{He}V}{q_{He}B} = \frac{4m_pV}{2q_pB} = 2\frac{m_pV}{q_pB} = 2R_1$$

$$l = R_1 = \frac{m_pV}{q_pB}$$

Критерии оценки.

Обоснование траектории движения	2 балла
Вывод формулы для радиуса окружности	2 балла
Соотношение между радиусами	2 балла
Общий центр	2 балла
Вывод	2 балла

11 КЛАСС

Задача 1

Определить концентрацию свободных электронов в меди. Необходимые Вам данные нужно взять в справочнике (Возможно, Вам понадобятся: плотность меди $8.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, молярная масса меди 64 г/моль , валентность меди – 1).

Решение:

$$n = \frac{N}{V}$$

Возьмем 1 кубометр меди и подсчитаем в нем число свободных электронов. Т.к. медь одновалентна, то, полагаем, что при ее кристаллизации высвобождается на каждый атом один электрон
2 балла

$$N = N_A \nu = N_A \frac{m}{\mu} = N_A \frac{\rho V}{\mu} \quad 4 \text{ балла}$$

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A \frac{\rho V}{\mu}}{V} = \frac{N_A \rho}{\mu} = \frac{6.02 \cdot 10^{23} \cdot 8.6 \cdot 10^3}{64 \cdot 10^{-3}} = 8.1 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3} \quad 4 \text{ балла}$$

Задача 2

К нерастянутой пружине жесткостью k подвесили груз массой m и отпустили. Определить амплитуду колебаний маятника и максимальную скорость груза.

Решение:

Максимальное растяжение пружины равно сумме растяжения до положения равновесия и амплитуды. А найти его можно из закона сохранения энергии: работа силы тяжести равна потенциальной энергии максимально растянутой пружины.

2 балла

$$mgx_m = \frac{kx_m^2}{2}, \quad x_m = \frac{2mg}{k}, \quad x_m = x_0 + a \quad 4 \text{ балла}$$
$$x_0 = \frac{mg}{k}, \Rightarrow a = x_m - x_0 = \frac{2mg}{k} - \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}$$

Максимальную скорость маятника найдем из закона сохранения энергии: кинетическая энергия груза при прохождении положения равновесия, равна потенциальной энергии пружины при амплитудном отклонении маятника от положения равновесия.

$$\frac{mV_m^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \Rightarrow V_m = \sqrt{\frac{ka^2}{m}} = a\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{m}} = g\sqrt{\frac{m}{k}} \quad 4 \text{ балла}$$

Задача 3

На гладкой горизонтальной поверхности около стенки стоит симметричный брусок массы m_1 с углублением полусферической формы радиуса R . Из точки А без трения и начальной скорости соскальзывает маленькая шайба массой m_2 . Какова максимальная скорость бруска при его последующем движении.

Решение:

При движении от шайбы А к В брусок давит на стену, поэтому система брусок-шайба не замкнута. $P \neq \text{const}$. После прохождения шайбой точки В брусок начинает двигаться вправо ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$), растрчивая энергию шайбы. Поэтому С ниже А. После прохождения шайбой точки В система брусок-шайба становится замкнутой и для неё выполняются законы сохранения (на левую стенку брусок больше не давит).

2 балла

$$\vec{P} = m_2 V_{2B} = \text{const}$$

$$m_2 g R = \frac{m_2 V_{2B}^2}{2}$$

$$V_{2B} = \sqrt{2gR}$$

2 балла

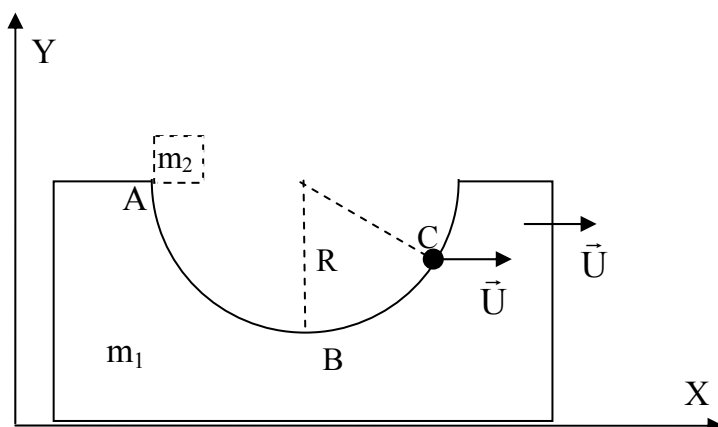
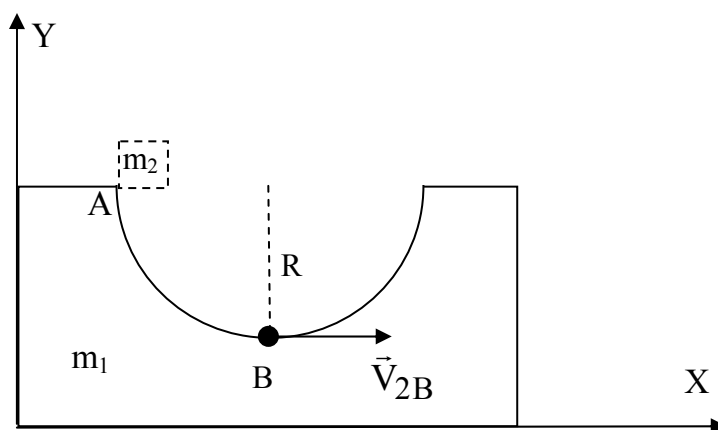
Для точки С :

$$m_2 \sqrt{2gR} = (m_1 + m_2)U$$

После точки С, шайба движется влево а брусок вправо и скорость бруска будет максимальна, когда шайба будет в точке В. Затем его скорость будет уменьшаться, т.к. после прохождения справа налево шайбой точки В сила на брусок действует влево.

Для точки В при движении шайбы справа налево:

$$E = \text{const}$$



$$P = m_2 \sqrt{2gR} = \text{const} \quad 2 \text{ балла}$$

$$\begin{cases} m_2 g R = \frac{m_2 U_2^2}{2} + \frac{m_2 U_1^2}{2} \\ m_2 \sqrt{2gR} = m_1 U_1 - m_2 U_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m_2 g R - m_2 U_2^2 = m_1 U_1^2 \\ m_2 \sqrt{2gR} - m_2 U_2 = m_1 U_1 \end{cases}$$

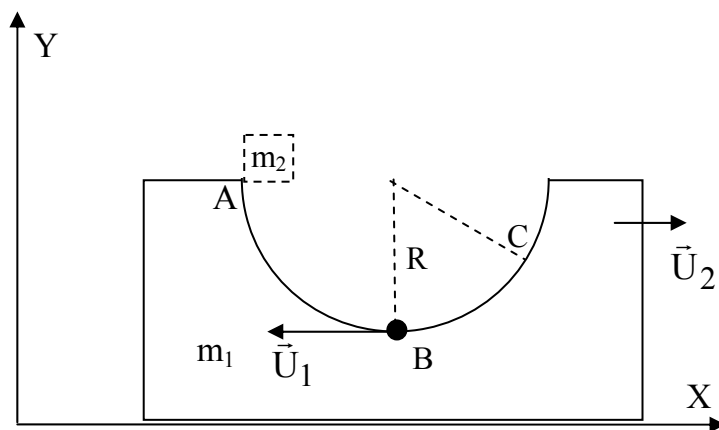
$$\begin{cases} m_2 (2gR - U_2^2) = m_1 U_1^2 \\ m_2 (\sqrt{2gR} + U_2) = m_1 U_1 \end{cases} :$$

$$\sqrt{2gR} - U_2 = U_1 \quad U_2 = \sqrt{2gR} - U_1 \quad 2 \text{ балла}$$

$$m_2 \sqrt{2gR} = m_1 U_1 - m_2 (\sqrt{2gR} - U_1) = m_1 U_1 - m_2 \sqrt{2gR} + m_2 U_1$$

$$2m_2 \sqrt{2gR} = (m_1 + m_2) U_1$$

$$U_1 = \frac{2m_2 \sqrt{2gR}}{m_1 + m_2} \quad 2 \text{ балла}$$



Задача 4

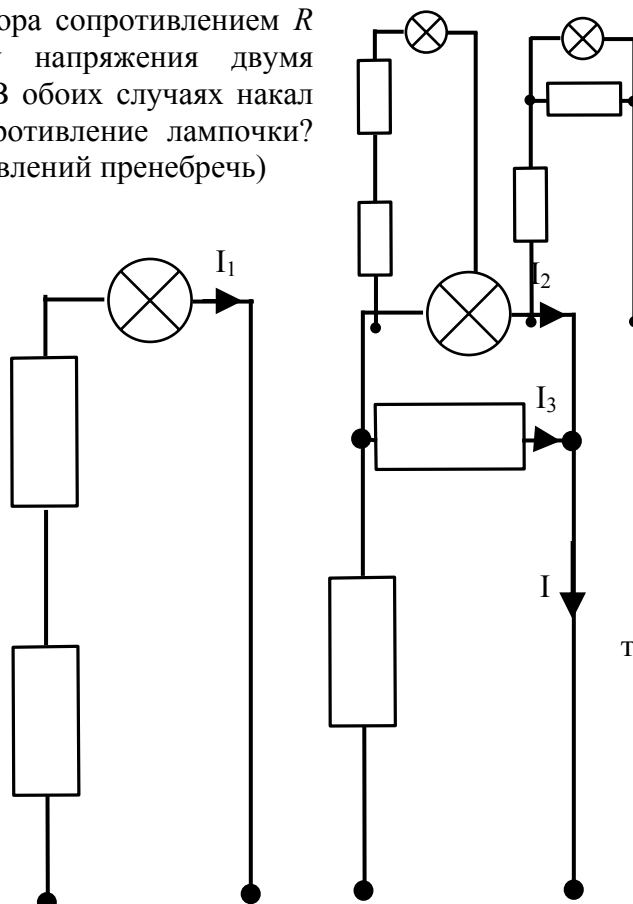
Лампочку и два одинаковых резистора сопротивлением R каждое подсоединили к источнику напряжения двумя способами, как показано на рисунке. В обоих случаях накал лампочки одинаков. Чему равно сопротивление лампочки? (Температурной зависимостью сопротивлений пренебречь)

Решение:

Равенство накала означает равенство токов через лампочку.

2 балла

Если r – сопротивление лампочки,



то:

$$I_1 = \frac{U}{2R + r} \quad 2 \text{ балла}$$

$$I_2 = I - I_3,$$

где

$$I_3 = I_2 \frac{r}{R}, \quad I = \frac{U}{R + \frac{Rr}{R + r}}$$

Получаем:

$$I_2 = \frac{U}{R + 2r}. \quad 4 \text{ балла}$$

Приравнявая токи I_1 и I_2 и получим $r = R$.

2 балла

Задача 5

По наклонной плоскости с коэффициентом трения μ и углом наклона α скользят вверх два тела массой m каждое, соединенные между собой невесомой нерастяжимой нитью. Эти тела связаны такой же нитью, перекинутой через невесомый блок, с телом массой m_3 . Найти силу натяжения нити между телами одинаковой массы.

Решение:

Используя свойство изотропности пространства и симметрий по отношению к повороту, представим нашу систему (рис. 1) из трех материальных точек, как целое, которое перемещается вдоль оси X (рис. 2).

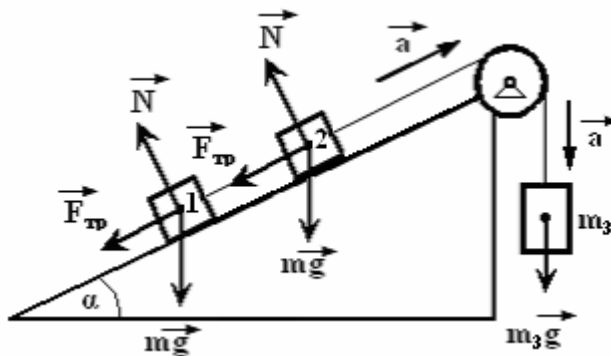


Рис. 1

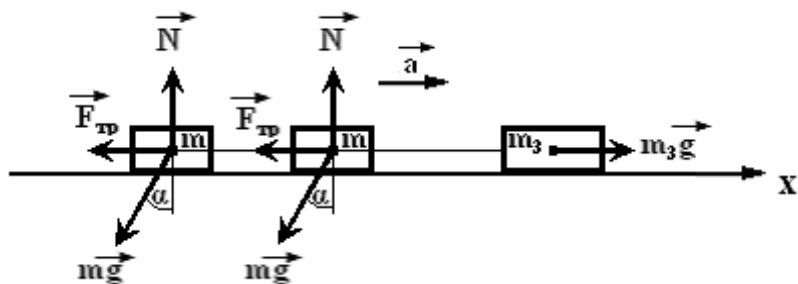


Рис. 2

Тогда закон его движения вместо трех уравнений движения для каждой материальной точки запишется одним уравнением

$$-2F_{тр} - 2mg \sin \alpha + m_3 g = (2m + m_3)a, \quad (1)$$

где $F_{тр}$ – сила трения.

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$a = g \left(\frac{m_3 - 2m(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{2m + m_3} \right). \quad (3)$$

Из рассмотрения закона движения первого тела (рис. 3) найдем силу натяжения нити T .

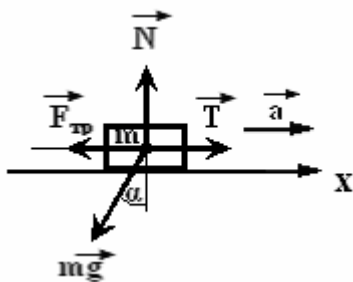


Рис. 3

$$T = ma + mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha). \quad (4)$$

С учетом формулы (3) получаем

$$T = \frac{mm_3 g(1 + \mu \cos \alpha + \sin \alpha)}{2m + m_3}. \quad (5)$$

Критерии оценки:

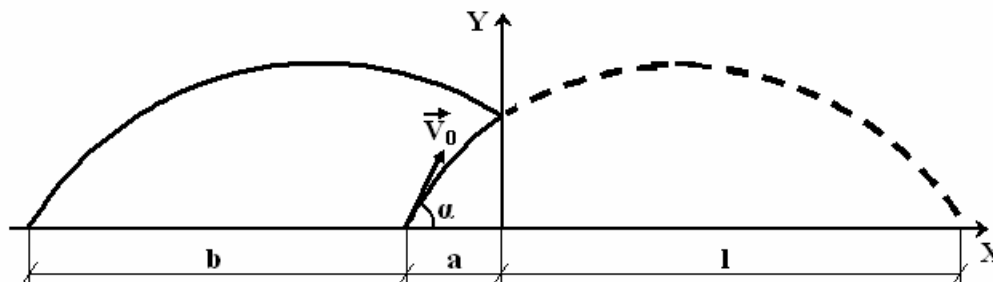
Свойство изотропности пространства	2 балла
Закон движения системы	2 балла
Выражение для силы трения	2 балла
Закон движения третьего тела	2 балла
Расчетная формула	2 балла.

11 класс.

Задача 11.1.

Условие. Тело брошено с начальной скоростью \vec{V}_0 под углом α к горизонту. Найти расстояние b от места броска до места его падения после упругого столкновения с вертикальной стенкой. Расстояние от места броска до стенки равно a . Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.



Используя симметрию пространства и обратимость движения находим

$$b = l - 2a, \quad (1)$$

где l – дальность полета тела при отсутствии стенки.

Дальность полета при броске тела под углом к горизонту равна

$$l = V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t, \quad (2)$$

где t – время полета.

Время полета будет равно

$$t = \frac{2 \cdot V_0 \cdot \sin \alpha}{g}, \quad (3)$$

где $g = 9,81 \left(\frac{м}{с^2} \right)$ – ускорение свободного падения.

Подставляя (3) в (2), получим

$$l = V_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{2 \cdot V_0 \cdot \cos \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}. \quad (4)$$

Отсюда

$$b = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} - 2a. \quad (5)$$

Критерии оценки.

Принцип симметрии пространства	4 балла
Дальность полета	2 балла
Время полета	2 балла
Расчетная формула	2 балла.

Задача 11.2.

Условие. В закрытом баллоне находится смесь из $m_1 = 0,5\text{г}$ водорода и $m_2 = 8,0\text{г}$ кислорода при давлении $p_1 = 2,35 \cdot 10^5 \text{Па}$. Между газами происходит реакция с образованием водяного пара. Какое давление p_2 установится в баллоне после охлаждения до первоначальной температуры? Конденсация пара отсутствует.

Решение. В реакцию $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$ вступит весь водород и половина кислорода (т.к. по условию их количество одинаково, а с одной молекулой кислорода в реакцию вступают две молекулы водорода).

$\frac{m_1}{\mu_1} = \frac{0,5}{2} = \frac{1}{4} \text{ моля}$, $\frac{m_2}{\mu_2} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \text{ моля}$). Давление в смеси газов по закону Дальтона равно

$$p_1 = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right), \quad (1)$$

где $\mu_1 = 2 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ – молярная масса водорода,

$\mu_2 = 32 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ – молярная масса кислорода,

$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная,

T – температура смеси,

V – объем баллона.

Давление смеси после реакции равно

$$p_2 = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_1 + \frac{m_2}{2}}{\mu} + \frac{m_2}{2\mu_2} \right), \quad (2)$$

где $\mu = 18 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ – молярная масса смеси.

С учетом (1) получим

$$p_2 = \frac{\left(\frac{m_1 + \frac{m_2}{2}}{\mu} + \frac{m_2}{2\mu_2} \right) \cdot p_1}{\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right)}. \quad (3)$$

Подставив числовые данные, получим

$$p_2 = 1,76 \cdot 10^5 \text{Па}.$$

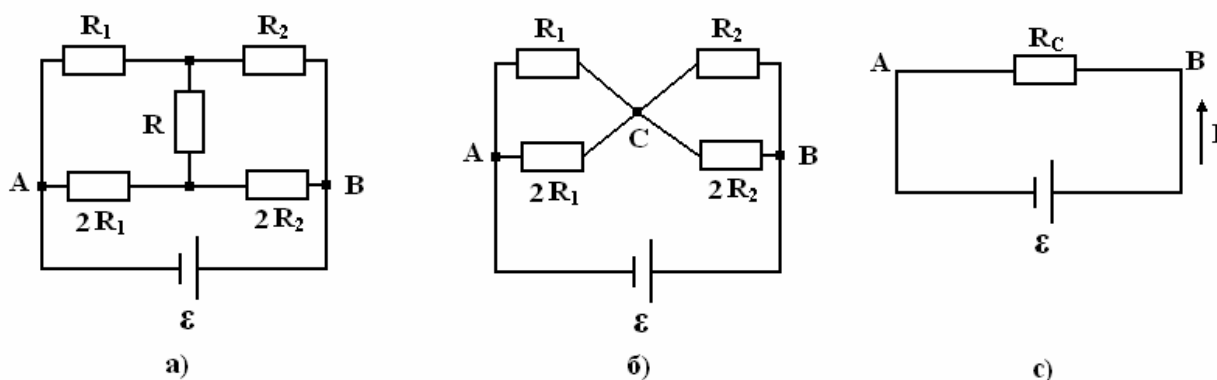
Критерии оценки.

Закон Дальтона	3 балла
Давление смеси после реакции	3 балла
Расчетная формула	3 балла
Числовой ответ	1 балл.

Задача 11.3.

Условие. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, найти ток, протекающий через сопротивление R_2 . Значения R , R_1 , R_2 , ε заданы.

Решение.



На схеме представлено мостовое соединение.

$$R_1 \cdot 2R_2 = 2R_1 R_2. \quad (1)$$

Следовательно, ток через сопротивление R не идет. Поэтому электрическую схему можно упростить, соединив в ней точки с равными потенциалами.

Общее сопротивление цепи равно

$$R_c = \frac{2}{3}(R_1 + R_2).$$

Ток в цепи равен

$$I = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}.$$

Напряжение на участке BC равно

$$U_{BC} = I \cdot \frac{2}{3} R_2.$$

Ток через сопротивление R_2 равен

$$I_2 = \frac{U_{BC}}{R_2} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}.$$

Критерии оценки.

Уравнение моста	3 балла
Ток в цепи	2 балла
Напряжение на участке BC	2 балла

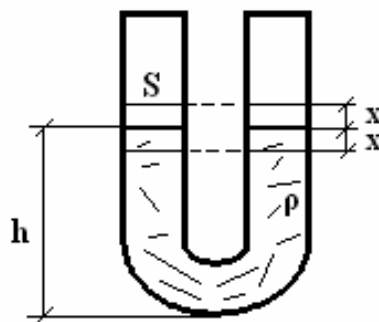
Конечная формула

3 балла.

Задача 11.4.

Условие. Найти период колебаний жидкости массой m и плотностью ρ , помещенной в U-образную трубку. Высота жидкости в трубке h , площадь сечения трубки S .

Решение.



Сила гидростатического давления равна

$$F = -pS = 2\rho gxS, \quad (1)$$

где p – давление, создаваемое столбом жидкости высотой x .

По второму закону Ньютона

$$F = m \ddot{x}. \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2), получим уравнение колебаний

$$\ddot{x} + \frac{2\rho gS}{m} x = 0. \quad (3)$$

Откуда квадрат циклической частоты равен

$$\omega^2 = \frac{2\rho gS}{m}. \quad (4)$$

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho gS}}. \quad (5)$$

Критерии оценки.

Сила давления	2 балла
Уравнение колебаний	3 балла
Циклическая частота	2 балла
Расчетная формула	3 балла

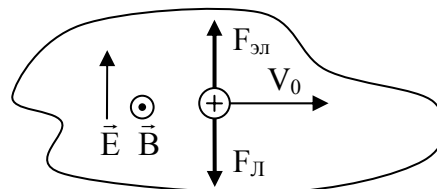
Задача 11.5

Заряженная частица влетает со скоростью V_0 в область пространства, где имеются электрическое и магнитное поля, и вылетает из нее без изменения скорости. Как

соотносятся по величине и направлению в этом случае напряженность электрического поля \vec{E} и индукция магнитного поля \vec{B} ?

Пусть \vec{E} направлен вертикально вверх, а заряд положителен. Тогда электрическая сила $\vec{F}_{эл} = q\vec{E}$ направлена вверх.

Так как по условию скорость частицы не меняется $\vec{V} = \vec{V}_0 = \text{const}$, то $\vec{a} = 0$ и равнодействующая электрической и магнитной силы равна нулю.



$$\vec{F}_{эл} + \vec{F}_{маг} = m\vec{a} = 0.$$

$$F_{эл} - F_{маг} = 0$$

Если $\vec{F}_{эл}$ направлена вверх, то $\vec{F}_{маг}$ вниз. $F_{эл} = F_{маг}$.

Магнитная сила – это сила Лоренца $F_{л} = qVB \sin \alpha$, и $\alpha = 90^\circ$, а ее направление определяется правилом левой руки. Вектор индукции \vec{B} направлен к нам перпендикулярно плоскости рисунка, а значит перпендикулярно \vec{E} и \vec{V} . Соотношение между модулями векторов \vec{E} и \vec{B} определяем из равенства $F_{эл} = F_{маг}$.

$$qE = qVB,$$

$$E = VB,$$

$$\frac{E}{B} = V_0.$$

Критерии оценки.

$\vec{V} = \vec{V}_0 = \text{const}$, то $\vec{a} = 0$ и равнодействующая сил равна нулю	4 балла
Определение направлений \vec{E} и \vec{B}	4 балла
Определение соотношения между модулями векторов \vec{E} и \vec{B}	2 балла