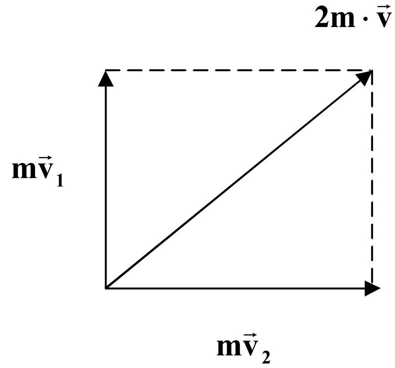
Решения, вариант 1



1. Скорость первой пули $\mathbf{v'_1}$ на высоте $\mathbf{h}$ следует из закона сохранения энергии $\frac{m(v_1^2 - v'^2_1)}{2} = mgh$, откуда $v'_1 = \sqrt{v_1^2 - 2gh}$. Здесь v_1 - проекция начальной скорости первой пули на вертикальную ось.

Из закона сохранения импульса при абсолютно неупругом ударе $m\vec{v}'_1 + m\vec{v}'_2 = 2m\cdot\vec{v}'$ для абсолютных величин скоростей тел следует $v' = \frac{m\sqrt{v'^2_1 + v'^2_2}}{2m} = \frac{\sqrt{v'^2_1 + v'^2_2}}{2}$.

В тепло при пренебрежении деформациями пуль уйдет разность кинетических энергий пуль до и после столкновения

$$2\cdot cm\Delta t = \frac{mv'^2_1}{2} + \frac{mv'^2_2}{2} - \frac{2m\cdot v'^2}{2} = \frac{mv'^2_1}{2} + \frac{mv'^2_2}{2} - m\cdot\frac{v'^2_1 + v'^2_2}{4} = m\cdot\frac{v'^2_1 + v'^2_2}{4}.$$

Отсюда

$$\Delta t = m\cdot\frac{v'^2_1 + v'^2_2}{4\cdot 2\cdot cm} = \frac{v'^2_1 + v'^2_2}{8c} = \frac{v_1^2 - 2gh + v'^2_2}{8c} \approx 80\ ^\circ C.$$

2. При внесении затравки в переохлажденную воду начинается образовываться лед при $\mathbf{t_0 = 0°C}$, вода нагревается до 0 °C.

Тогда из первого начала термодинамики имеем $cM(t_0 - t) = \lambda m$, где $\mathbf{m}$ – масса образовавшегося льда. Отсюда

$$m = \frac{cM(t_0 - t)}{\lambda} \approx 0.23\ \text{кг}.$$

3. Из закона сохранения энергии с учетом Джоулевого нагрева получаем $cm(t - t_0) = \eta\cdot I^2R\tau$, где τ - время нагрева. Сила тока связана с плотностью тока соотношением $I = jS$. Сопротивление проволоки длиной $l = \frac{V}{S}$ равно $R = \rho\frac{l}{S}$. Подставляя эти соотношения в выражение для Джоулевого тепла, получим $I^2R\tau = j^2S^2\rho\frac{l}{S}\tau = j^2S^2\rho\frac{V}{S^2}\tau = j^2\rho V\tau$. Подставляя это выражение в закон сохранения энергии, получаем $cm(t - t_0) = \eta\cdot j^2\rho V\tau$, откуда

$$m = \frac{\eta\cdot j^2\rho V\tau}{c(t - t_0)} = \frac{0.7\cdot 9\cdot 10^{12}\cdot 1.1\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-5}\cdot 60}{4.19\cdot 10^3\cdot 90} \approx 0.011\ \text{кг}.$$

4. Фокусное расстояние линзы определяется соотношением $\frac{1}{F} = \left(\frac{n_{\text{линзы}}}{n_{\text{среды}}} - 1\right)\frac{2}{R}$, где $\mathbf{R}$ – радиус кривизны линзы. Тогда в первом случае (среда – вода) $\frac{1}{F_1} = \left(\frac{n_3}{n_1} - 1\right)\frac{2}{R}$, а во втором случае (среда – бензол) $\frac{1}{F_2} = \left(\frac{n_3}{n_2} - 1\right)\frac{2}{R}$. Поделив второе выражение на первое, получим

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{1}{F_1}}{\frac{1}{F_2}} = \frac{\frac{n_3}{n_1} - 1}{\frac{n_3}{n_2} - 1} = \frac{n_3 - n_1}{n_3 - n_2}\frac{n_2}{n_1} = \frac{1.5 - 1.33}{1.5 - 1.5}\frac{1.5}{1.33} = \infty.$$

5. Периоды упругих колебаний груза с массами **M** и **M+m** равны $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$, где **M** – масса чашки, **m –** масса добавочных гирь.

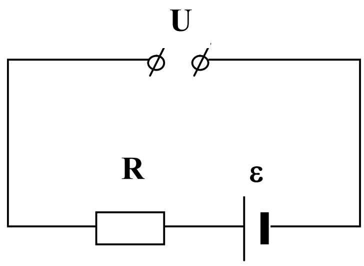
До того, как на чашку положили гири, равновесная длина пружины следует из равенства проекций силы Гука и силы тяжести на вертикальную ось $kx_1 = Mg$, откуда $\frac{M}{k} = \frac{x_1}{g}$, а после этого определяется выражением $kx_2 = (M+m)g$, откуда $\frac{M+m}{k} = \frac{x_2}{g}$.

Подставляя эти связи в выражения для периодов, получаем $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{x_1}{g}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{x_2}{g}}$.

Отсюда $x_1 = \frac{T_1^2}{4\pi^2}g$, $x_2 = \frac{T_2^2}{4\pi^2}g$ и удлинение равно

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{T_2^2 - T_1^2}{4\pi^2}g \approx 0.06 \text{ м}.$$

6. Из закона сохранения энергии получаем $IU = I\varepsilon + I^2(R+r)$, откуда $U = \varepsilon + I(R+r)$, $I = \frac{U-\varepsilon}{R+r}$.



Падение напряжения на зажимах аккумулятора

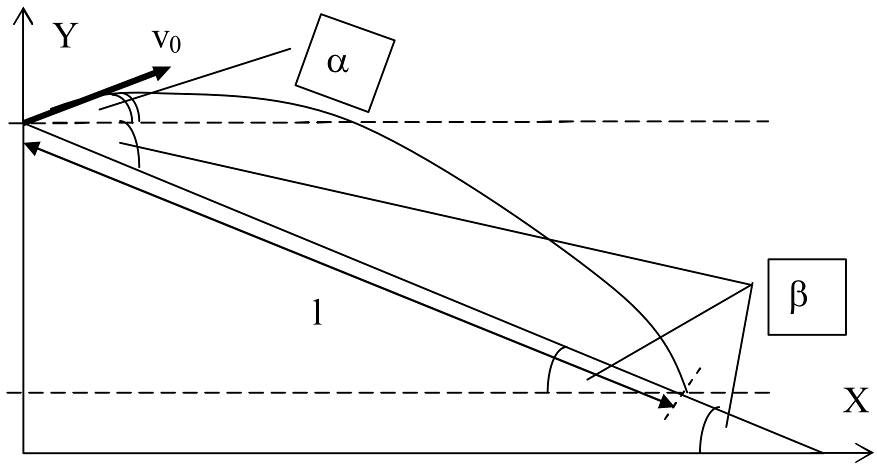
$U_A = Ir + \varepsilon = \frac{U-\varepsilon}{R+r}r + \varepsilon = \frac{Ur - \varepsilon r + \varepsilon R + \varepsilon r}{R+r} = \frac{Ur + \varepsilon R}{R+r}$.

Таким образом

$$U_A = \frac{Ur + \varepsilon R}{R+r} = 27.5 \text{ В}$$

Решения, вариант 2

1. Найдем начальную скорость снаряда: $\eta\lambda m = \frac{Mv_0^2}{2}$, отсюда $v_0^2 = \frac{2\eta\lambda m}{M}$.



Направляя оси, как показано на рисунке*, получим

$x = v_0 t\cos\alpha$, $y = y_0 + v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$.

В точке падения

$x = l\cos\beta$, $y = y_0 - l\sin\beta$,

так что в этой точке имеем

$l\cos\beta = v_0 t\cos\alpha$, $y_0 - l\sin\beta = y_0 + v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$, где t – время полета.

Выражая время полета из первого уравнения, и подставляя во второе, получим $l = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}$.

Подставляя угол $\beta = \frac{\pi}{4}$ и воспользовавшись известным выражением для синуса суммы, получаем $l = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{g\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}v_0^2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{g}$.

Длина полета максимальна при выполнении условия экстремума $\frac{dl}{d\alpha} = 0$, откуда с использованием выражения для l имеем $-\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)+\cos\alpha(-\sin\alpha+\cos\alpha) = 0$, или $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}2\alpha = 1$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

Подставляя это значение и выражение для начальной скорости в формулу для l, получим окончательно

$$l = 2\frac{2\eta\lambda m}{Mg}\frac{\cos\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{4}} \approx 27.5\ \text{км}.$$

* Систему координат можно также ввести, направив ось Y перпендикулярно, а ось X вдоль наклонной плоскости.

2. По закону сохранения массы $m = m_1 + m_2$, где m_2 - масса пара.

По закону сохранения энергии $rm_2 = \lambda m_1$. Отсюда $m_1 = \frac{r}{\lambda}m_2 = \frac{r}{\lambda}(m - m_1)$. Выражая m_1, получаем

$$m_1 = \frac{r}{r+\lambda}m \approx 0.035\ \text{кг}.$$

3. Число витков проволоки равно отношению длины провода на длину одного витка $N = \frac{\ell}{\ell_0} = \frac{\ell}{\pi D}$. Рассмотрим закон сохранения энергии для данной системы $\eta \frac{U^2}{R} T = c\rho_в V \Delta t$. Отсюда сопротивление $R = \frac{\eta U^2 T}{c\rho_в V\Delta t}$. С другой стороны, $R = \rho \frac{\ell}{S} = \rho \frac{4\ell}{\pi d^2}$, где **S** - площадь сечения проволоки. Приравнивая выражения для **R**, найдем длину проволоки $\ell = \frac{\eta U^2 T \pi d^2}{4\rho c\rho_в V\Delta t}$. Подставим это выражение в формулу $N = \frac{\ell}{\pi D}$, получим

$$N = \frac{\eta U^2 T d^2}{4\rho c\rho_в V\Delta t D} \approx 12.$$

4. Фокусное расстояние линзы определяется соотношением $\frac{1}{F} = \left(\frac{n_{линзы}}{n_{среды}} - 1\right)\frac{2}{R}$, где **R** – радиус кривизны линзы. Тогда в первом случае (среда – воздух) $\frac{1}{F_1} = \left(\frac{n_3}{n_1} - 1\right)\frac{2}{R}$, а во втором случае (среда – вода) $\frac{1}{F_2} = \left(\frac{n_3}{n_2} - 1\right)\frac{2}{R}$. Поделив второе выражение на первое, получим

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{1}{F_1}}{\frac{1}{F_2}} = \frac{\frac{n_3}{n_1} - 1}{\frac{n_3}{n_2} - 1} = \frac{n_3 - n_1}{n_3 - n_2}\frac{n_2}{n_1} = \frac{1.5 - 1}{1.5 - 1.33}\frac{1.33}{1} \approx 4.$$

5. Период колебания маятника в стоящем лифте $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ при подъеме $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$, а при спуске $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$. По условию задачи период колебаний увеличивается, значит, лифт едет вниз. Поделив T_0 на T_2, получим $\frac{T_0}{T_2} = \sqrt{\frac{g-a}{g}}$, откуда

$$a = g\left(1 - \frac{T_0^2}{T_2^2}\right) = \left(1 - \left(\frac{100}{150}\right)^2\right) g \approx 0.55g.$$

6. Из закона сохранения энергии получаем $IU = I\varepsilon + I^2(R + r)$, откуда $U = \varepsilon + I(R + r)$, и, окончательно

$$I = \frac{U - \varepsilon}{R + r}.$$