1 Вариант

1. Решите неравенство: $|x| \cdot (x - 1/8) < 0$

Решение:
Быстрее всего решить это неравенство методом интервалов.
Находим нули уравнения $|x| \cdot (x - 1/8) = 0$.
Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные имеют смысл.
В данном случае:
а) $x = 0$.
б) $x - 1/8 = 0$.
$x = 1/8$.

Отмечаем полученные нули 0 и 1/8 (= 0,125) на числовой оси.
Получается три интервала:
$(-\infty; 0) \cup (0; 1/8) \cup (1/8; \infty)$.

1) Возьмем любое число из крайнего правого промежутка, например, $x = 10$:
$|10| \cdot (10 - 1/8)$.
Это выражение больше нуля, поэтому на этом промежутке ставим знак плюс (+).
2) Возьмем любое число из среднего промежутка, например, $x = 0,1$.
$|0,1| \cdot (0,1 - 0,125) = 0,1 \cdot (-0,025)$.
Это выражение меньше нуля. На этом промежутке ставим знак минус (-).
3) Возьмем любое число из крайнего левого промежутка, например, $x = -10$:
$|-10| \cdot (-10 - 1/8) = 10 \cdot (-10,125)$.
Это выражение меньше нуля. На этом промежутке тоже ставим знак минус (-).

Так как по условию неравенство строго меньше нуля, то нас интересуют интервалы со знаком минус (-).
В данном случае это $(-\infty; 0) \cup (0; 1/8)$.

2. Для участия в олимпиаде по геологии преподаватель отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

РЕШЕНИЕ.

Т.к. известно, что двое мальчиков войдут в команду, то остается отобрать 3 из 8. Для выборки важен только состав (по условию все члены команды не различаются по ролям). Следовательно, выборки – сочетания из n различных элементов по m элементов, их число: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$, при n=8, m=3.

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 56 .$$

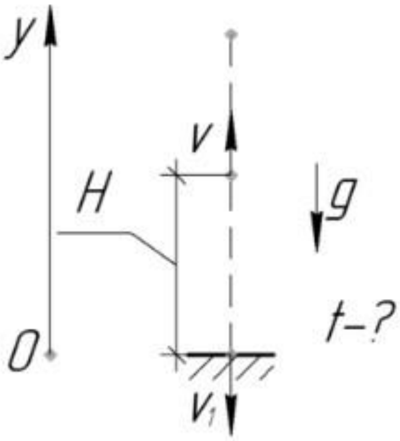
ОТВЕТ. 56 способов сформировать команду

3. С вертолета, находящегося на высоте 300 м, упал образец породы. Через какое время образец упадет на землю, если вертолет поднимается со скоростью 5 м/с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: H=300 м, υ=5 м/с, t−?

Решение задачи:

Если сбрасывать груз с движущегося тела, то в момент броска скорость груза по направлению и величине совпадает со скоростью тела. Если знать этот факт, то дальнейшее решение задачи тривиально. Запишем уравнение движения тела.



$$oy: y = H + \upsilon t - \frac{gt^2}{2}$$

Координата y груза станет нулем, когда груз упадет на землю.

$$0 = H + \upsilon t - \frac{gt^2}{2}$$

Решим полученное квадратное уравнение относительно искомой величины t. Подставим численные данные задачи в уравнение.

$$5t^2 - 5t - 300 = 0$$

$$t^2 - t - 60 = 0$$

Сосчитаем дискриминант.

$$D = 1 + 4 \cdot 60 = 241$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{241}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 8,3 \text{ с} \\ t = -7,3 \text{ с} \end{array}\right.$$

Понятно, что время не может быть отрицательным.

Ответ: 8,3 с.

4. Прямой проводник, по которому течет постоянный ток, расположен в однородном магнитном поле так, что направление тока в проводнике составляет угол 30° с направлением линий магнитной индукции. Как изменится сила Ампера, действующая на проводник, если его расположить под углом 60° к направлению линий магнитной индукции?

Решение задачи:

На проводник, по которому течет ток, в магнитном поле действует сила Ампера. Величину этой силы можно определить по следующей формуле:

$$F_A = IBl\sin\alpha$$

Запишем эту формулу для двух случаев, описанных в условии задачи:

$$\left\{ \begin{gathered} F_{A1} = IBl\sin\alpha_1 \\ F_{A2} = IBl\sin\alpha_2 \end{gathered} \right.$$

Поделим нижнее уравнение на верхнее, тогда:

$$\frac{F_{A2}}{F_{A1}} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$$

По условию задачи угол между проводником и направлением линий магнитной индукции сначала равен 30° ($\alpha_1 = 30^\circ$), а затем его увеличивают до 60° ($\alpha_2 = 60^\circ$), поэтому:

$$\frac{F_{A2}}{F_{A1}} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 1} = \sqrt{3}$$

Ответ: увеличится в $\sqrt{3}$ раза.

5. Скорость распространения волн, образовавшихся в результате сейсморазведочных работ, 1,5 м/с. Расстояние между ближайшими точками волны, которые отличаются по фазе на 90°, равно 1,5 м. Найти период колебаний.

Дано: υ=1,5 м/с, Δφ=90∘, Δl=1,5 м, T−?

Решение задачи:

Точки, о которых говорится в условии, находятся на расстоянии Δl друг от друга. Если точки, находящиеся на расстоянии Δl, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi$, а точки, находящиеся на расстоянии λ – с разностью фаз 2π, то справедливо записать следующее соотношение:

$$\frac{\Delta l}{\Delta\varphi} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Выразим отсюда длину волны λ:

$$\lambda = \frac{2\pi\Delta l}{\Delta\varphi} \quad (1)$$

Скорость распространения колебаний υ можно определить через длину волны λ и период колебаний T следующим образом:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T}$$

Откуда период колебаний T равен:

$$T = \frac{\lambda}{\upsilon} \quad (2)$$

Подставим выражение (1) в формулу (2), тогда получим:

$$T = \frac{2\pi\Delta l}{\upsilon\Delta\varphi}$$

Задача решена в общем виде, подставим данные задачи в полученную формулу и посчитаем численный ответ:

$$T = \frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 2}{1,5 \cdot \pi} = 4 \text{ с}$$

Ответ: 4 с.

2 Вариант

1. Упростите выражение:

$|p + q| + |k — q| — |k — p|$,
если $0 < q < p < k$.
Решение:
Модуль числа - это расстояние на числовой оси от нуля до данного числа. Модуль числа не может быть отрицательным.
Модуль положительного числа и числа нуль есть само это число: $|2| = 2$, $|5| = 5$, $|0| = 0$.
Модуль отрицательного числа равен ему противоположному: $|-2| = -(-2) = 2$, $|-5| = -(-5) = 5$.
Другими словами: $|x| = x$, если $x \geq 0$; $|x| = -x$, если $x<0$.
Например:
1) если $|x| = 4$, то $x = \pm 4$;
2) если $|x| = 0$, то $x = 0$;
3) $|x| = -7$, такого быть не может.

В данном случае дано: $k > p > q > 0$, значит:
1) $p + q > 0$, т.к. сумма двух положительных чисел есть число положительное;
2) $k - q > 0$, т.к. от большего числа k вычитается меньшее число q;
3) $k - p > 0$, т.к. от большего числа k вычитается меньшее число p.

Следовательно,
$|p + q|$, $|k - q|$ и $|k - p|$ есть числа положительные, поэтому:
$|p + q| = p + q$;
$|k - q| = k - q$;
$|k - p| = k - p$.
Выполняем действие: $(p + q) + (k - q) - (k - p) = p + q + k - q - k + p$.
Сокращаем q и -q, k и -k.
Остается: 2p.

2. Группу из 20 школьников нужно разделить на 3 геологические бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

Решение.
Создавая первую бригаду, отбирают 3 человека из 20, создавая вторую – 5 из оставшихся 17, создавая третью – 12 из оставшихся 12. Для выборок важен только состав (роли членов бригады не различаются).

Эти выборки - сочетания из n различных элементов по m элементов, их число: $C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$.

Создавая сложную выборку (из 3-х бригад), воспользуемся правилом умножения:

$$N = C_{20}^3 \cdot C_{17}^5 \cdot C_{12}^{12} = \frac{20!}{3!\cdot(20-3)!} \cdot \frac{17!}{5!\cdot(17-5)!} \cdot \frac{12!}{12!\cdot(12-12)!} = \frac{20!}{3!\cdot 17!} \cdot \frac{17!}{5!\cdot 12!} \cdot \frac{12!}{12!\cdot 0!} =$$

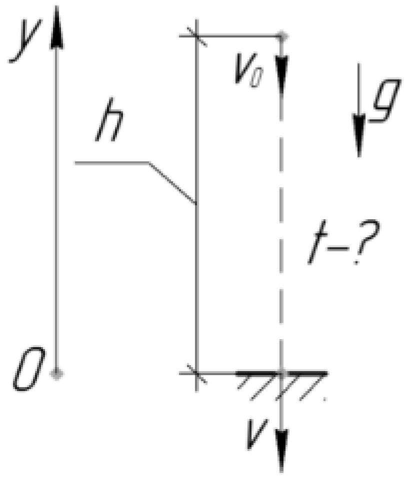
$$= \frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 7054320.$$

Ответ. 7054320 способов.

3. С вертолета, находящегося на высоте 500 м, упал образец породы. Через какое время камень достигнет поверхности Земли, если вертолет спускался со скоростью 5 м/с?

Дано: h=500 м, υ0=5 м/с, t−?

Решение задачи:



Так как камень двигался вместе с равномерно снижающимся вертолетом, то в момент отрыва от него у камня будет иметься начальная скорость, равная скорости вертолета υ_0.

Всё усложнение задачи заключается лишь в этом, т.е. проверяется понимание сути относительности движения.

Далее запишем уравнение движения камня:

$$oy: y = h — \upsilon_0 t — \frac{gt^2}{2}$$

У поверхности Земли координата y камня будет равна нулю, поэтому чтобы найти время падения необходимо решить квадратное уравнение.

$$h — \upsilon_0 t — \frac{gt^2}{2} = 0$$

Подставим численно исходные данные в уравнение.

$$5t^2 + 5t — 500 = 0$$

$$t^2 + t — 100 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 100 = 401$$

$$t = \frac{—1 \pm \sqrt{401}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} t = —10,51 \text{ с} \\ t = 9,51 \text{ с} \end{array}\right.$$

Очевидно, что отрицательный корень не может являться ответом к задаче.

Ответ: 9,51 с.

4. Прямой провод, по которому течет постоянный ток, расположен в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Если длину провода уменьшить в два раза, а силу тока в нем увеличить в четыре раза, во сколько раз изменится сила Ампера, действующая на проводник.

Решение задачи:

На проводник, по которому течет ток, в магнитном поле действует сила Ампера. Величину этой силы можно определить по следующей формуле:

$$F_{\text{А}} = IBl\sin\alpha$$

Запишем эту формулу для двух случаев, описанных в условии задачи:

$$\left\{ \begin{gathered} F_{\text{А1}} = I_1 B l_1 \sin\alpha \hfill \\ F_{\text{А2}} = I_2 B l_2 \sin\alpha \hfill \end{gathered} \right.$$

Поделим нижнее уравнение на верхнее, тогда:

$$\frac{F_{\text{А2}}}{F_{\text{А1}}} = \frac{I_2 l_2}{I_1 l_1}$$

В условии сказано, что длину провода уменьшили в два раза, а силу тока в нем увеличили в четыре раза, то есть $l_2 = \frac{1}{2} l_1$ и $I_2 = 4I_1$, тогда:

$$\frac{F_{\text{А2}}}{F_{\text{А1}}} = \frac{4I_1 \cdot \frac{1}{2} l_1}{I_1 l_1} = 2$$

Ответ: увеличится в 2 раза.

5. Волны, при сейсморазведочных работах, распространяются в упругой среде со скоростью 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 1 м. Определить частоту колебаний.

Дано: υ=100 м/с, Δl=1 м, ν–?

Решение задачи:

Скорость распространения колебаний υ можно определить через длину волны λ и частоту колебаний ν следующим образом:

$$\upsilon = \lambda \nu$$

Откуда частота колебаний ν равна:

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} \quad (1)$$

Точки, фазы колебаний которых противоположны, колеблются с разностью фаз, равной π. Если точки, находящиеся на расстоянии l, колеблются с разностью фаз π, а точки, находящиеся на расстоянии λ – с разностью фаз 2π, то справедливо записать следующее соотношение:

$$\frac{l}{\pi} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Выразим отсюда длину волны λ:

$$\lambda = 2l \quad (2)$$

Подставим выражение (2) в формулу (1), тогда получим:

$$\nu = \frac{\upsilon}{2l}$$

Задача решена в общем виде, подставим данные задачи в полученную формулу и посчитаем численный ответ:

$$\nu = \frac{100}{2 \cdot 1} = 50 \text{ Гц}$$

Ответ: 50 Гц.