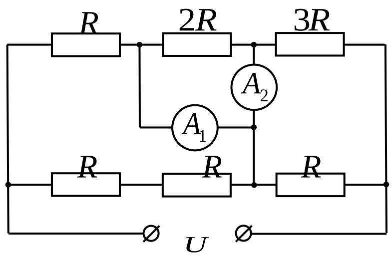
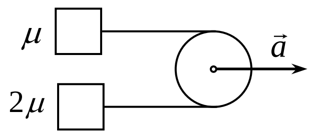
Решения и критерии оценивания
Заключительный тур олимпиады Росатом, физика, 9 класс
международный комплект
2019-2020 учебный год

1. В цепи, схема которой представлена на рисунке, сопротивление $R=1$ кОм, амперметры сопротивлений не имеют, напряжение на зажимах источника $U=220$ В. Значения всех сопротивлений приведены на схеме. Найти показания амперметров. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.



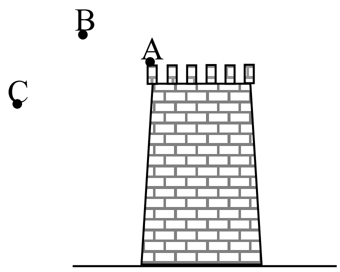
2. Три машины одновременно выехали из города А в город В и ехали по одной дороге с постоянными скоростями. Скорость первой машины была v, второй - $2v/3$. Известно, что первая машина приехала в город В, когда часы показывали t часов, вторая – когда часы показывали $t+1$ часов, третья – когда часы показывали $t+2$ часов. Найти скорость третьей машины.

3. На шероховатой горизонтальной поверхности покоятся два бруска с одинаковой массой m. Коэффициенты трения брусков о поверхность равны μ и 2μ. К брускам привязана веревка, которая переброшена через легкий горизонтально расположенный блок (см. рисунок; вид сверху). Какое минимальное горизонтальное ускорение $\vec{a}$ нужно сообщить блоку, чтобы оба бруска стронулись с места?

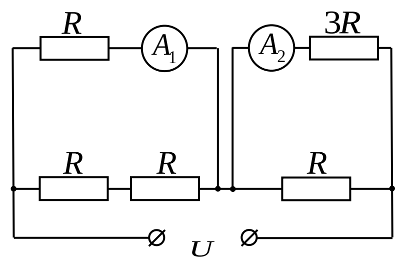


4. В результате протекания по цилиндрическому проводнику электрического тока, температура проводника увеличилась на $\Delta T = 10°$C по сравнению с температурой окружающей среды и далее не увеличивалась. Затем проводник отключили от источника, отрезали $1/10$ часть его длины и подключили к тому же источнику напряжения. Насколько в этот раз его температура будет превышать температуру окружающей среды? Считать, что удельное сопротивление проводника не зависит от температуры в рассматриваемых интервалах изменения температур.

5. С высокой башни под некоторым углом к горизонту бросили тело. Известны положения тела через интервалы времени τ и 2τ после броска (см. рисунок; эти положения отмечены точками В и С). Известно также положение точки, откуда бросили тело (точка А). С помощью построения найти положение тела спустя интервал времени 3τ после броска. Считать, что в этот момент тело еще не упало на землю. Построение обосновать.



Решения



1. Поскольку электрическое напряжение на сопротивлении $2R$ в верхнем колене цепи равно нулю, это сопротивление можно выбросить. Поэтому данная электрическая цепь эквивалентна цепи, показанной на рисунке. Сопротивление первого (из параллельных одного R и двух последовательных R) и второго (из параллельных $3R$ и R) находим по стандартным правилам

$$R_1 = \frac{2R}{3},\ R_2 = \frac{3R}{4}$$

Отношение напряжений на этих участках U_1 и U_2 равно отношению их сопротивлений (т.к. при последовательном соединении через них текут одинаковые токи). Поэтому

$$U_1 = \frac{8}{17}U\ ,\ U_2 = \frac{9}{17}U$$

Поэтому токи через первый и второй амперметры равны

$$I_1 = \frac{8U}{17R} = 0{,}104\ \text{А},\ I_2 = \frac{3U}{17R} = 0{,}039\ \text{А}$$

Критерии оценки задачи
1. Правильное преобразование цепи с выбрасыванием из нее сопротивления $2R$ – 0,5 балла,
2. Правильное нахождение общих сопротивлений различных участков цепи, содержащих последовательно и параллельно соединенные резисторы – 0,5 балла,
3. Правильно найдены напряжения на двух последовательных участках цепи – 0,5 балла,
4. Правильно найдены токи через амперметры – 0,5 балла,
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Применяя формулу «расстояние-время-скорость» к первой и второй машинам, получим

$$v(t-t_0) = \frac{2}{3}v(t+1-t_0)$$

где t_0 - время выхода машин из города А. Отсюда

$$t_0 = t-2$$

Теперь применяя ту же формулу к первой и третьей машинам, получим для скорости третьей машины v_3

$$2v = 4v_3$$

Или

$$v_3 = \frac{v}{2}$$

Критерии оценки задачи
1. Правильное использование формул «расстояние-время-скорость» – 0,5 балла,
2. Правильные уравнения движения для первой и второй машин – 0,5 балла,
3. Правильное нахождение времени выхода машин из города А – 0,5 балла,

4. Правильное уравнение движения для третьей машины и правильное нахождение ее скорости – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Понятно, что при небольшом ускорении блока сила натяжения веревки будет небольшой и сможет сдвинуть только тело с меньшим трением. Второй же груз в этом случае будет стоять. При увеличении ускорения блока будет возрастать сила натяжения нити, и при определенном ускорении блока тело с большим трением сдвинется. Найдем этот момент, постепенно увеличивая ускорение блока.

Итак, пусть ускорение блока a таково, что тело с меньшим трением движется, а с бо́льшим – покоится. Тогда второй закон Ньютона для движущегося тела в проекциях на ось, направленную вдоль ускорения блока дает

$$ma_1 = T - \mu mg \qquad (*)$$

где a_1 - ускорение движущегося тела. Очевидно, что ускорение тела a_1 вдвое превосходит ускорение блока a. Действительно, если блок перемещается на некоторую величину Δx, то с той стороны от блока, где находится покоящееся тело, требуется лишний кусочек веревки длиной Δx. Поэтому веревка с другой стороны становится короче на величину Δx. Кроме того, блок, от которого начинается веревка, привязанная ко второму телу, тоже перемещается на Δx. Следовательно, перемещение второго тела составляет $2\Delta x$, т.е. скорость второго тела вдвое больше скорости блока в любой момент времени. Поэтому и ускорение второго тела больше ускорения блока в два раза. В результате из (*) имеем

$$T = 2ma + \mu mg \qquad (**)$$

Из формулы (**) следует, что при малом ускорении блока сила T, больше μmg, но меньше $2\mu mg$. А поскольку при увеличении ускорения блока сила T возрастает, при некотором ускорении второе тело сдвинется с места. Это произойдет, если

$$T = 2ma + \mu mg \geq 2\mu mg \qquad \Rightarrow \qquad a \geq \mu g / 2$$

Критерии оценки задачи

1. Правильная идея решения – использование уравнений динамики при том, что при минимальном ускорении a, когда оба груза стронулись с места, ускорение груза с бо́льшим трением равно нулю - 0,5 балла,
2. Правильная связь ускорения блока и ускорения тела с меньшим трением – 0,5 балла,
3. Правильные уравнения динамики и использование формулы для максимальной силы трения при движении или в момент начала движения – 0,5 балла,
4. Правильный ответ для ускорения блока – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. В стационарном режиме (когда температура проводника не меняется с течением времени) количество теплоты, выделившееся в проводнике при протекании по нему электрического тока, равно количеству теплоты, отданному проводником в окружающую среду. А поскольку последняя величина пропорциональна разности температур проводника и окружающей среды, а также площади его боковой поверхности, имеем

$$\frac{U^2}{r} = \kappa \Delta T S \qquad (*)$$

где U - напряжение источника, r - сопротивление проводника, κ - коэффициент пропорциональности для мощности теплопотерь, S - площадь боковой поверхности проводника.

Когда от проводника отрезали одну десятую часть его сопротивление и площадь боковой поверхности уменьшились на одну десятую. Поэтому условие теплового равновесия в этом случае дает

$$\frac{10U^2}{9r} = \kappa \Delta T_1 \frac{9}{10} S \qquad (*)$$

Деля соотношения (*) и (**) друг на друга, найдем

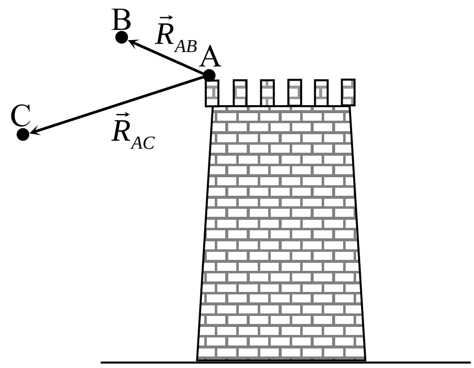
$$\Delta T_1 = \frac{100}{81} \Delta T = 12,3^\circ \mathrm{C}$$

Критерии оценки задачи
1. Правильная идея решения – воспользоваться законом теплопроводности Фурье, при том, что в стационарном режиме количество отданного в окружающую среду тепла и количество тепла, выделившееся в проводнике равны друг другу - 0,5 балла,
2. Правильно использован законы Фурье и закон Джоуля-Ленца для первого случая – 0,5 балла,
3. Правильно использован закон Фурье и закон Джоуля-Ленца для второго случая – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

5. Из законов равноускоренного движения имеем

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \qquad (*)$$

где $\vec{R}(t)$ - радиус-вектор тела относительно некоторой системы координат, $\vec{R}_0$ - начальный радиус-вектор относительно той же системы координат. Помещая начало системы координат в точку A, получим из (*)



$$\begin{aligned} \vec{R}(\tau) &= \vec{R}_{AB} = \vec{v}_0\tau + \frac{\vec{g}\tau^2}{2} \\ \vec{R}(2\tau) &= \vec{R}_{AC} = 2\vec{v}_0\tau + 2\vec{g}\tau^2 \end{aligned} \qquad (**)$$

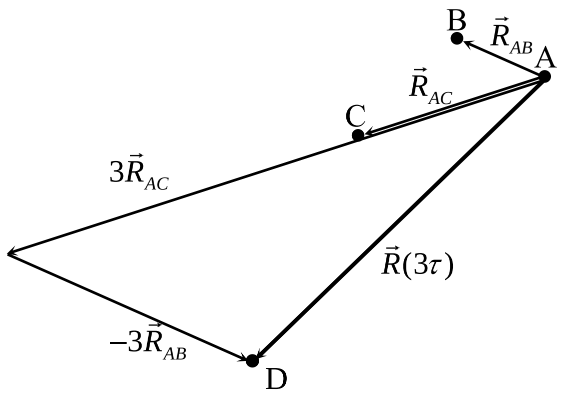
Из системы (**) находим

$$\frac{4\vec{R}_{AB} - \vec{R}_{AC}}{2} = \vec{v}_0\tau \qquad \vec{R}_{AC} - 2\vec{R}_{AB} = \vec{g}\tau^2$$

Используя теперь найденные векторы, получим

$$\vec{R}(3\tau) = 3\vec{v}_0\tau + \frac{9}{2}\vec{g}\tau^2 = \frac{3\left(4\vec{R}_{AB} - \vec{R}_{AC}\right)}{2} + \frac{9\left(\vec{R}_{AC} - 2\vec{R}_{AB}\right)}{2} = 3\left(\vec{R}_{AC} - \vec{R}_{AB}\right) = 3\vec{R}_{AC} - 3\vec{R}_{AB}$$

Построение вектора $\vec{R}(3\tau)$, который определяет положение тела в момент времени 3τ после броска по отношению к точке A, и положение тела в этот момент (точка D) показаны на рисунке. Вектор $3\left(\vec{R}_{AC}-\vec{R}_{AB}\right)$ выделен жирным. Конечно посторoение вектора, соединяющего две точки, и его удлинение в три раза могут быть сделаны циркулем и линейкой.



Отметим, что существуют два ограничения на данные условия: точки A, B и C должны лежать в вертикальной плоскости, и расстояния между этими точками по горизонтали должны равняться друг другу. Первое связано с тем, что траектория тела, брошенного под углом к горизонту, лежит в вертикальной плоскости, и потому любые ее точки лежат в этой плоскости. Второе обусловлено тем, что горизонтальное движение тела, брошенного под углом к горизонту – равномерное, и за интервал времени 2τ тело проходит вдвое больший путь по горизонтали, чем за время τ). При невыполнении этих условий задача не имеет решения.

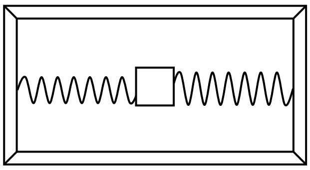
Критерии оценки задачи

1. Правильная идея решения – использование векторного закона движения и правил сложения векторов для построения – 0,5 балла,
2. Правильно записаны законы движения для моментов τ и 2τ – 0,5 балла,
3. Правильно найден вектор $\vec{v}_0\tau$ и $\vec{g}\tau^2$ – 0,5 балла,
4. Правильное построение искомого радиус-вектора и точки, в которой тело будет через время 3τ после броска – 0,5 балла,

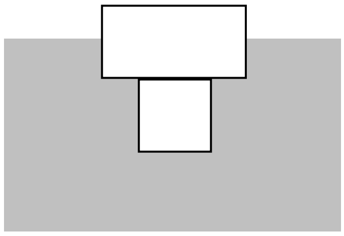
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

Решения и критерии оценивания
Заключительный тур олимпиады Росатом, физика, 9 класс
2019-2020 учебный год

1. Тело бросили под углом к горизонту с края ступеньки. Известно, что максимальной высоты тело достигло через время $t=0{,}5$ с после броска, а через время $5t$ упало на землю. Найти высоту ступеньки. $g=10$ м/с^2.

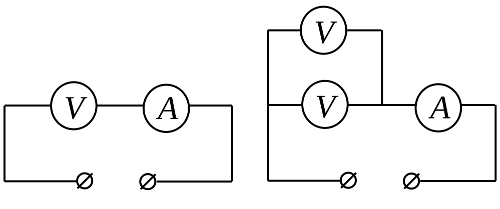


2. Тело прикрепляют с помощью двух пружин, коэффициенты жесткости которых отличаются в два раза, к прямоугольной рамке. При этом тело может двигаться только вдоль длинной стороны рамки. Когда рамку расположили горизонтально (см. рисунок), тело оказалось точно посередине рамки, при этом пружины действуют на тело с силами F. Когда рамку расположили вертикально так, что более жесткая пружина находится вверху, одна из пружин оказалась недеформированной. Найти массу тела. Считать, что для любых деформаций пружин справедлив закон Гука.



3. Имеется стакан, составленный из двух цилиндрических частей: узкой с дном, и открытой с радиусом вдвое большим радиуса узкой части. Высота частей стакана одинакова. Стакан опускают в воду вниз дном, и он погружается на половину высоты широкой части и далее остается в таком положении (см. рисунок). Какой максимальный объем воды можно налить в стакан, чтобы он не затонул. Объем стакана V. Считать, что стенки стакана очень тонкие.

4. Незнайка поехал на автомобиле из Цветочного города в Солнечный город. По дороге между ними находится деревня Простоквашино. Через время t_1 после выезда расстояние от Незнайки до Простоквашино оказалось вдвое большим того расстояния, которое он проехал. Когда после этого Незнайка проехал еще расстояние x, расстояние от Незнайки до Солнечного города оказалось вдвое большим расстояния от него до Простоквашино. Через время t_2 после этого Незнайка приехал в Солнечный город. Найти скорость автомобиля, считая ее постоянной.



5. Когда к источнику постоянного напряжения подключили последовательно соединенные амперметр и вольтметр (левый рисунок), вольтметр показал напряжение U. Когда параллельно этому вольтметру подключили еще один такой же вольтметр (правый рисунок), вольтметры в сумме показали напряжение $12U/7$. Затем параллельно этим двум вольтметрам подключают еще очень много точно таких же вольтметров. Какое напряжение они покажут в сумме? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

Решения

1. Пусть начальная скорость камня v_0, угол под которым его бросили - α. Время подъема на максимальную высоту определяется из условия равенства нулю вертикальной составляющей скорости тела выражением

$$0 = v_0 \sin\alpha - gt \qquad \Rightarrow \qquad v_0 \sin\alpha = gt \qquad (*)$$

Полное время движения t_1 определяется из уравнения для вертикальной координаты тела

$$0 = h + v_0 \sin\alpha t_1 - \frac{gt_1^2}{2} \qquad (**)$$

Где h - высота ступеньки, t_1 - полное время движения. Используя формулу (*), получим из (**)

$$h = \frac{1}{2} g t_1 \left(t_1 - 2t\right) = \frac{15}{2} g t^2 = 18{,}8 \text{ м}$$

Критерии оценки задачи

1. правильная идея решения – использование уравнений равноускоренного движения - 0,5 балла,
2. Правильная формула для времени подъема на максимальную высоту – 0,5 балла,
3. Правильная формула для дальности полета – 0,5 балла,
4. Правильный ответ, правильные вычисления – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Условию задачи не противоречат два положения – когда в горизонтальном положении пружины растянуты или сжаты.

Рассмотрим первый случай: в горизонтальном положении пружины растянуты. Тогда, поскольку при перевороте рамки в вертикальное положение растяжение нижней пружины должно уменьшиться, а верхней – увеличиться, то именно нижняя пружина будет не деформирована, а груз будет удерживать верхняя пружина. Поскольку величина укорочения нижней пружины равна величине удлинения верхней (при перевороте рамки), то со стороны нижней пружины пропадает сила F)эта пружина станет недеформированной), а со стороны верхней добавляется сила $2F$. Отсюда заключаем, что

$$m = \frac{3F}{g}$$

Второй случай: в горизонтальном положении обе пружины сжаты. Тогда в вертикальном положении недеформированной будет верхняя пружина, а силу тяжести компенсировать нижняя. При этом поскольку при перевороте рамки дополнительное удлинение верхней пружины равно дополнительному укорочению нижней, к силе упругости нижней пружины F за счет ее дополнительной деформации добавится сила $F/2$ (поскольку коэффициент жесткости нижней пружины вдвое меньше). Поэтому

$$m = \frac{3F}{2g}$$

Таким образом, масса тела может принимать два значения

$$m_1 = \frac{3F}{g} \text{ и } m_2 = \frac{3F}{2g}$$

Критерии оценки задачи
1. Правильно использован закон Гука – 0,5 балла,
2. Правильно рассмотрен случай вертикальной рамки, когда в горизонтальном положении пружины были сжаты – 0,5 балла,
3. Правильно рассмотрен случай вертикальной рамки, когда в горизонтальном положении пружины были растянуты – 0,5 балла,
4. Правильные ответы – 0,5 балла (если участник рассмотрел только один случай, его максимальная оценка за задачу не превышает 1 балла).
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Поскольку стакан в показанном на рисунке положении находится в равновесии, сила тяжести стакана равна силе Архимеда

$$mg = \rho g V_{п.ч.}$$

где m - масса стакана, ρ - плотность воды, $V_{п.ч.}$ - объем погруженной в воду части стакана. Если обозначить радиус узкой части стакана как r, а высоту и широкой, и узкой части как h, то

$$V_{п.ч.} = \pi r^2 h + \pi \left(2r\right)^2 \frac{h}{2} = 3\pi r^2 h$$

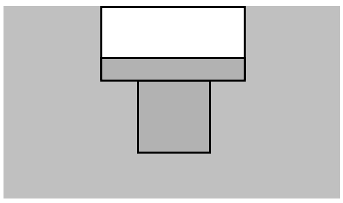
Или

$$m = 3\pi\rho r^2 h$$

Когда в стакан наливают воду, он погружается глубже, и условие равновесия стакана с водой дает

$$\left(m + M\right) g = \rho g V_{п.ч.} \qquad \Rightarrow \qquad mg = g\left(\rho V_{п.ч.} - M\right) = g\rho\left(V_{п.ч.} - V\right) \qquad (*)$$

где V - объем налитой в стакан воды. С другой стороны, разность $V_{п.ч.} - V$ имеет смысл объема, погруженной в воду части стакана, в которой нет воды. Таким образом, из формулы (*) заключаем, что при наливании в стакан воды он погружается в воду так, что объем незаполненной водой «подводной» части стакана определяется только массой самого стакана, т.е. не меняется.



Используем это утверждение для нахождения максимального объема воды, который можно налить в стакан. Очевидно, что при наливании максимального объема стакан погрузится в воду по самые края. При этом согласно доказанному утверждению объем стакана, не заполненный водой, будет таким же как объем погруженной в воду части стакана, когда в нем совсем нет воды, т.е. $3\pi r^2 h$. Поэтому в стакане можно полностью заполнить узкую часть, а широкую до такой высоты x, что

$$\pi\left(2r\right)^2\left(h - x\right) = 3\pi r^2 h \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{h}{4}$$

Следовательно, максимальный объем воды, который можно налить в стакан, равен

$$V_1 = \pi r^2 h + \pi (2r)^2 x = \pi r^2 h + 4\pi r^2 \frac{h}{4} = 2\pi r^2 h$$

Поскольку объем стакана $V = 5\pi r^2 h$, то в стакан можно налить максимальный объем воды

$$V_1 = \frac{2}{5} V$$

Критерии оценки задачи
1. Правильное условие равновесия стакана с водой – 0,5 балла,
2. Правильно найдена масса стакана – 0,5 балла,
3. Правильное условие равновесия стакана, максимально погруженного в воду – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Составим уравнения, отвечающие условию. Пусть скорость автомобиля - v, расстояние между Цветочным городом и Солнечным Городом - L, между Цветочным городом и Простоквашино - l. Тогда для времени t_1 имеем

$$vt_1 = \frac{l - vt_1}{2} \qquad (*)$$

Согласно условию задачи, когда Незнайка проехал еще расстояние x, расстояние от него до Солнечного города было стало вдвое большим расстояния от него до Простоквашино. Это условие может реализовываться двумя способами. Первый - Незнайка уже проехал Простоквашино. Второй - Незнайка еще не проехал Простоквашино. В первом случае имеем

$$L - (vt_1 + x) = 2(vt_1 + x - l). \qquad (**)$$

Во втором

$$L - (vt_1 + x) = 2\left(l - (vt_1 + x)\right). \qquad (***)$$

И для прибытия в Солнечный город имеем

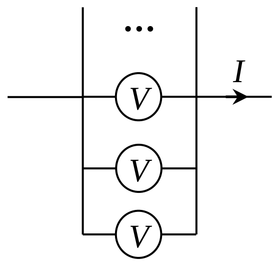
$$vt_1 + x + vt_2 = L \qquad (4*)$$

Решение системы уравнений (*), (**), (4*) или (*), (***), (4*) дает

$$v_1 = \frac{2x}{4t_1 + t_2}, \; v_2 = \frac{2x}{4t_1 - t_2}, \quad (t_1 > t_2 / 4)$$

Критерии оценки задачи
1. Правильно использованы формулы «расстояние-время-скорость» – 0,5 балла,
2. Правильно составлена система уравнений для движения Незнайки – 0,5 балла,
3. Участник заметил, что с условием задачи совместимы две ситуации – проехав расстояние x, Незнайка еще не проехал, или уже проехал Простоквашино – 0,5 балла,
4. Правильные ответы – 0,5 балла (если участник рассмотрел только один случай, его максимальная оценка за задачу не превышает 1 балла).
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

5. Очевидно, что если в проводник, по которому течет ток I, включены соединенные последовательно какое-то количество одинаковых вольтметров, то сумма показаний всех вольтметров равна произведению тока I на сопротивление одного вольтметра. Действительно, пусть имеется цепь, содержащая n вольтметров, показанная на рисунке справа. Тогда поскольку вольтметры одинаковы, через каждый течет ток I/n, показания каждого (а вольтметр показывает напряжение на самом себе) равны $U_1 = IR/n$ (R - сопротивление вольтметра), а сумма показаний вольтметров равна



$$nU_1 = IR$$

Построим теперь формулу для напряжения одного, суммы напряжений двух или большого количества вольтметров. Когда в цепь включен один вольтметр (левый рисунок в условии задачи), его показания U можно найти по закону Ома для данного участка цепи

$$I = \frac{U_0}{R+r} \quad \Rightarrow \quad U = IR = \frac{U_0 R}{R+r} \qquad (*)$$

(U_0 - напряжение источника, R - сопротивление одного вольтметра, r - сопротивление амперметра). Когда в цепь включены два вольтметра (правый рисунок условия задачи), сумму показаний вольтметров можно найти как

$$I = \frac{U_0}{(R/2)+r} = \frac{2U_0}{R+2r} \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{7}U = IR = \frac{2U_0 R}{R+2r} \qquad (**)$$

Если в цепь включены очень много вольтметров n, то сумму показаний всех вольтметров можно найти как

$$I = \frac{U_0}{(R/n)+r} = \frac{nU_0}{R+nr} \approx \frac{U_0}{r} \quad \Rightarrow \quad U_\Sigma = IR = \frac{U_0 R}{r} \qquad (***)$$

Таким образом, для нахождения суммы показаний большого количества вольтметров нужно знать величину $U_0 R/r$. Найдем ее из формул (*), (**). «Переворачивая» эти формулы, получим

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{U_0} + \frac{r}{U_0 R}$$
$$\frac{7}{12U} = \frac{1}{2U_0} + \frac{r}{U_0 R}$$

Умножая теперь первое уравнение системы на ½ и вычитая первое уравнение из второго, получим

$$\frac{r}{U_0 R} = \frac{1}{6U}$$

И из формулы (***) заключаем, что сумма показаний большого количества вольтметров, включенных в нашу цепь, будет равна

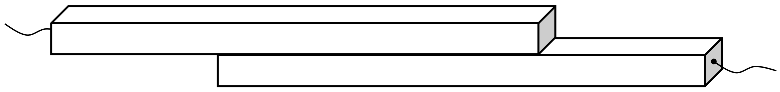
$$U_\Sigma = 6U$$

Критерии оценки задачи

1. Доказано, что если в систему параллельно соединенных одинаковых вольтметров втекает ток I, то сумма показаний всех вольтметров равна IR (R - сопротивление одного вольтметра) – 0,5 балла,
2. Правильный расчет цепи с одним вольтметром (связь показаний вольтметра с напряжением источника) – 0,5 балла,
3. Правильный расчет цепи с двумя вольтметрами – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла

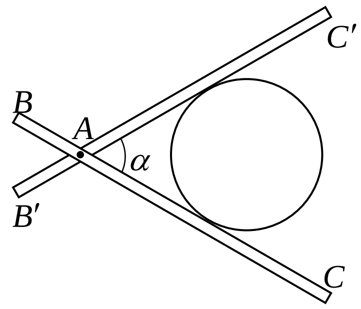
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

Решения и критерии оценивания
Заключительный тур олимпиады Росатом, физика, 9 класс
2019-2020 учебный год



1. Два очень тонких и очень длинных проводящих стержня прямоугольного сечения имеют одинаковые размеры. Удельное сопротивление материала одного стержня вдвое меньше удельного сопротивления материала второго. Стержни плотно прижимают друг к другу боковой стороной так, что прижатыми оказываются две третьих длины стержней. Стержни включаются в электрическую цепь своими неперекрытыми торцами (см. рисунок). Найти сопротивление системы стержней, если сопротивление стержня с меньшим сопротивлением $R=10$ Ом.

2. Полностью заполненный водой калориметр с электронагревателем имеет комнатную температуру t_0. Нагреватель включают, и через время $T=30$ с температура калориметра увеличивается на величину Δt. Затем воду из калориметра быстро выливают, вместо нее наливают такое же количество воды комнатной температуры и снова включают нагреватель. Чтобы теперь нагреть калориметр до температуры $t_0+\Delta t$ требуется время $5T/6$. После этого воду из калориметра снова быстро выливают, а наливают такое же количество воды с температурой на величину Δt ниже комнатной. Сколько понадобится времени, чтобы нагреть калориметр тем же нагревателем до комнатной температуры? Считать, что калориметр не отдает тепло в окружающее пространство. Температуры воды и калориметра уравниваются очень быстро.



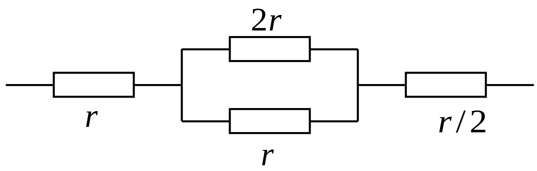
3. На горизонтальной поверхности между двумя одинаковыми стержнями BC и $B'C'$ находится шайба (см. рисунок; вид сверху). Стержни скреплены шарнирно в точке А. Концы стержней B и B' сжимают, перемещая шайбу по поверхности. При каком угле между стержнями α наступит заклинивание - шайба перестанет двигаться при любом усилии, прикладываемом к точкам B и B'? Коэффициент трения между стержнями и шайбой - μ, трение между шайбой и поверхностью отсутствует.

4. Граната, брошенная с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, в верхней точке своей траектории разорвалась на множество осколков, которые в системе отсчета, связанной с гранатой, летят во все стороны с одинаковыми скоростями. Известно, что осколки падали на землю в течение времени Δt. Через какое время после взрыва упал на землю самый первый осколок?

5. Тело движется вдоль оси x из точки с координатой x ($x>0$).. Проекция скорости тела на ось x зависит от его координаты x по закону $v_x = c/x$, где $c>0$ - известная постоянная. Через какое время тело окажется в точке с координатой $2x$?

Решения

1. Поскольку стержни очень тонкие, падением напряжения в поперечном направлении можно пренебречь. Кроме того, электрическое напряжение линейно падает вдоль длины каждого стержня в месте их «бокового» контакта, следовательно, электрический ток через боковые поверхности стержней течь не будет. Поэтому можно считать, что данная электрическая цепь сводится к цепи, показанной на рисунке



Здесь левый резистор r - сопротивление одной трети стержня с бóльшим удельным сопротивлением, верхний резистор $2r$ - сопротивление двух третьих стержня с бóльшим удельным сопротивлением, нижний резистор r - сопротивление двух третьих стержня с меньшим удельным сопротивлением, $r/2$ - сопротивление одной трети стержня с меньшим удельным сопротивлением. А поскольку сопротивление стержня с меньшим удельным сопротивлением равно R, то

$$\frac{3r}{2} = R \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{2R}{3}$$

Складывая сопротивления цепи, показанной на рисунке, по правилам сложения последовательно и параллельно соединенных резисторов, найдем общее сопротивление стержней

$$R_{об} = \frac{13}{9}R = 14,4 \text{ Ом}$$

Критерии оценки задачи

1. Обоснование (со ссылкой на малость размеров в поперечном направлении и малое падение напряжения), что участок соединенных стержней – последовательное соединение резисторов – 0,5 балла,
2. Правильно перерисована цепь с учетом пропорциональности сопротивление длине стержня – 0,5 балла,
3. Правильно использованы формулы для расчета эквивалентного сопротивления – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Пусть теплоемкость воды в калориметре - C, теплоемкость калориметра - C_0, мощность нагревателя - P. Тогда уравнение теплового баланса для первого нагревания (начальные температуры воды и калориметра равны t_1) имеем

$$PT = \left(C + C_0\right)\Delta t \qquad (*)$$

(T - время нагревания, Δt - увеличение температуры калориметра при нагревании). После того как воду вылили, заполнили калориметр водой комнатной температуры, в калориметре установилась температура, большая, чем комнатная. При этом, поскольку потерь энергии нет, то количество необходимой для нагревания теплоты можно вычислить как количество теплоты, необходимое для нагревания воды (но не калориметра) от комнатной температуры на величину Δt. Поэтому уравнение теплового баланса для второго нагревания дает

$$P\frac{5}{6}T = C\Delta t \qquad (**)$$

Вычитая (**) и (*), получим

$$P\frac{1}{6}T = C_0\Delta t \qquad (***)$$

Количество теплоты, необходимое для третьего нагревания можно посчитать так. В третьем процессе вода должна нагреться на величину Δt (от температуры на Δt ниже комнатной до комнатной), а калориметр остыть на величину Δt (от температуры на Δt выше комнатной до комнатной). Поэтому уравнение теплового баланса дает

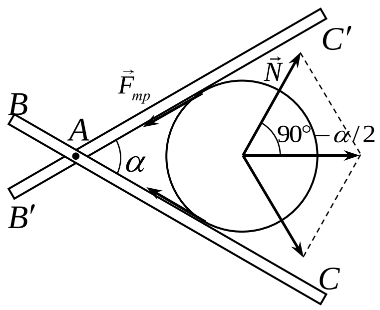
$$PT_1 + C_0\Delta t = C\Delta t$$

где T_1 - искомое время. Используя формулы (**) и (***), получим

$$T_1 = \frac{2}{3}T = 20 \text{ сек}$$

Критерии оценки задачи
1. Правильная идея решения – использование уравнения теплового баланса с калориметром и без калориметра - 0,5 балла,
2. Найдено соотношение теплоемкости калориметра и воды в калориметре – 0,5 балла,
3. Правильное уравнение теплового баланса для третьего случая – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. При действии на точки B и B' «сжимающих» сил возникнут силы реакции, действующие со стороны стержней на шайбу, сумма которых направлена от шарнира, соединяющего стержни. Эта сила будет действовать на шайбу, выталкивая ее из системы стержней. С другой стороны, при этом возникнут силы трения, которые направлены к шарниру, скрепляющему стержни, и которые препятствуют движению шайбы (см. рисунок).



Шайба будет двигаться, если сумма сил реакции (которые определяются тем, как мы сжимаем концы стержней B, и потому могут быть любыми) будет превосходить сумму двух сил трения, которая будет направлена к шарниру А. При этом силы трения будут принимать свои максимальные значения μN. То есть движение будет, если

$$2N\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) \geq 2\mu N\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

или

$$\mu \leq tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

И соответственно движения не будет ни при какой силе N (т.е. произойдет заклинивание), если

$$\mu \geq tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Критерии оценки задачи

1. Правильная расставлены силы, действующие на шайбу - 0,5 балла,
2. Правильное условие начала движения шайбы – 0,5 балла,
3. Использовано правильное условие для максимальной силы трения покоя – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Для исследования процесса разлета осколков перейдем в систему отсчета, которая имеет такую же скорость, как и граната до взрыва. В этой системе отсчета все осколки разлетаются с одинаковыми скоростями, поэтому первым на землю упадет тот осколок, который (в этой системе отсчета) движется вертикально вниз, последним – тот осколок, который (в этой системе отсчета) движется вертикально вверх. Пусть при взрыве осколки приобретают скорость v_1 (в системе отсчета, в которой граната покоилась). Тогда время падения на землю осколка, летящего после взрыва вертикально вниз и летящего после взрыва вертикально вверх, определяется из уравнений

$$h = v_1 t_1 + \frac{g t_1^2}{2}$$

$$h = -v_1 t_2 + \frac{g t_2^2}{2}$$

где $h = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$ - высота, на которой произошел взрыв гранаты, t_1 и t_2 - время падения первого и последнего осколка. Отсюда находим

$$t_1 = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{g} \qquad t_2 = \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{g}$$

Вычитая первое равенство из второго, получим $\Delta t = t_2 - t_1 = \dfrac{2v_1}{g}$, или

$$v_1 = \frac{g\Delta t}{2}$$

Подставляя это значение в формулу для t_1 и используя известное выражение для высоты подъема тела, брошенного под углом к горизонту ($h = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$), найдем время падения первого осколка на землю

$$t_1 = \frac{\Delta t}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2 \Delta t^2}} - 1\right)$$

Понятно, что ответ для времени падения этого осколка не зависит от системы отсчета, и потому это время будет таким же и в системе отсчета, связанной с землей.

Критерии оценки задачи

1. Правильная идея решения – в системе отсчета, связанной с гранатой, скорости осколков одинаковы по величине и направлены по всем направлениям – 0,5 балла,
2. Найдено время падения первого и последнего осколка на землю – 0,5 балла,
3. Правильно найдена скорость, которую приобретают осколки при взрыве в системе отсчета гранаты – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла.
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

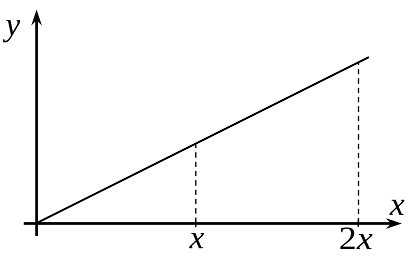
5. Движение тела не является ни равномерным, ни равноускоренным. Поэтому готовых соотношений для нахождения времени его попадания в те или иные точки нет. Поэтому будем вычислять время, исходя из определения скорости. Для этого мысленно разобьем траекторию на элементы Δx_1, Δx_2, Δx_3, … - настолько малые, что скорость на каждом из них можно считать постоянной. Тогда время прохождения n-го элемента Δx_n равно

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x_n}{v(x_n)} = \frac{1}{c} x_n \Delta x_n$$

где $v(x_n)$ - скорость тела в какой-то точке внутри n-го элемента. Поэтому время прохождения участка траектории, лежащего от координаты x до координаты $2x$ определяется суммой времен прохождения всех малых элементов, на которые можно разделить этот участок траектории

$$t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + ... = \frac{1}{c}\left(x_1\Delta x_1 + x_2\Delta x_2 + x_3\Delta x_3 + ...\right) \qquad (*)$$

Сумму в скобках приходится вычислять при вычислении работы силы упругости. И вычисляется она графически. Для ее вычисления нужно построить график зависимости $y = x$. Тогда сумма (*) равна площади под графиком $y(x)$ между вертикальными прямыми x и $2x$ (показаны на рисунке пунктиром). Эта фигура представляет собой трапецию с высотой x и основаниями x и $2x$. Находя площадь этой трапеции, получим



$$t = \frac{3x^2}{2c}$$

Критерии оценки задачи
1. Правильная идея и обоснование решения – вычисление площади под графиком функции $1/v(x)$ - 0,5 балла,
2. Правильно построен график этой функции – 0,5 балла,
3. Правильно выбраны границы суммирования – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.