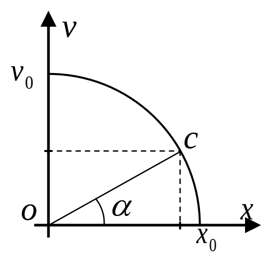
Решения и критерии оценивания
Заключительный тур олимпиады Росатом, физика, 11 класс
международный комплект
2019-2020 учебный год

1 вариант

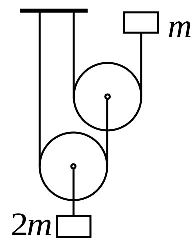
1. Цепочку с мелкими звеньями длиной l удерживают за верхний конец над горизонтальной опорой, которой она касается своим нижним концом. Цепочку отпускают, и она начинает падать на опору. Считая, что скорость упавших звеньев мгновенно гасится до нуля из-за абсолютно неупругого удара и упавшие звенья цепочки никак не влияют на движение остальных звеньев, найти, через какое время после начала движения цепочки кинетическая энергия еще не упавших звеньев будет максимальной? Чему равна эта максимальная кинетическая энергия?

2. Один моль азота находится в сосуде объемом $V=1$ л под давлением $p=10^5$ Па. Газ откачивают, поддерживая температуру сосуда (со всем содержимым) неизменной. Какую массу газа придется откачать к тому моменту, когда давление в сосуде упадет вдвое? Никаких других газов, кроме азота в сосуде нет. Дан ряд табличных параметров азота (не все они понадобятся для решения): молярная масса $\mu = 28$ г/моль, температура кипения при атмосферном давлении $t_к = -196°$ С, удельная теплота испарения $\lambda = 5,6$ кДж/моль, температура плавления $t_{пл} = -210°$ С. Универсальная газовая постоянная - $R = 8,31$

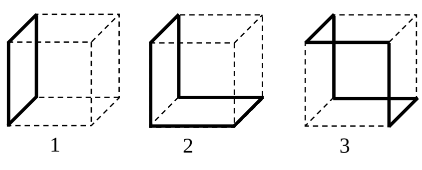
3. Тело движется вдоль некоторой оси x. Известно, что график зависимости проекции скорости тела на эту ось от его координаты по этой оси представляет собой (в определенном масштабе) «кусочек» окружности (см. рисунок). Найти проекцию ускорения тела в такой момент времени, когда координата и скорость тела соответствуют такой точке c данного графика, что $\angle cox = \alpha = 30°$ (этот угол отмечен дугой на рисунке). Величины v_0 и x_0 - известны.



4. Механическую систему, состоящую из двух невесомых подвижных блоков, двух тел массой m и $2m$ и невесомых и нерастяжимых нитей, удерживают в определенном положении (см. рисунок). В некоторый момент времени систему отпускают. Найти ускорения тел.



5. Виток тонкого провода, изогнутого вдоль четырех ребер куба (рис. 1), обладает индуктивностью L_1. Виток провода, изогнутого вдоль шести ребер того же куба (рис. 2), обладает индуктивностью L_2. Найти индуктивность витка провода, изогнутого вдоль шести ребер того же куба так, как это показано на рисунке 3.



Решения

1. С одной стороны, чем дольше движется цепочка, тем больше ее скорость. С другой – меньше масса еще не упавших звеньев. Поэтому существует такое положение цепочки, в котором кинетическая энергия еще не упавших звеньев максимальна. Найдем этот максимум.

Пусть на стол упал кусочек цепочки длиной x. Тогда (поскольку цепочка движется с постоянным ускорением g) скорость еще не упавших на стол звеньев будет равна

$$v = \sqrt{2gx}$$

Масса не упавших к этому моменту звеньев равна

$$m_1 = \frac{l-x}{l}m$$

Поэтому еще не упавшие звенья цепочки имеют следующую кинетическую энергию

$$K = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{mg\left(l-x\right)x}{l}$$

Вычисляя производную этой величины как функции x и приравнивая производную к нулю, найдем длину x, отвечающую ее максимуму

$$x = \frac{l}{2}, \qquad (*)$$

а затем и время движения до этого состояния

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Максимальную кинетическую энергию еще не упавших звеньев найдем, подставляя расстояние x (*) в формулу для кинетической энергии

$$K = \frac{1}{4}mgl$$

Критерии оценки задачи

1. Правильное нахождение скорости неупавших звеньев как функции длины упавших звеньев – 0,5 балла,
2. Правильные нахождение кинетической энергии неупавших звеньев как функции длины упавших звеньев – 0,5 балла,
3. Правильное нахождение минимума этой функции (через производную или формулы для квадратичной функции) – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Найдем температуру азота в сосуде по закону Клапейрона-Менделеева

$$T = \frac{pV}{\nu R} = 12K = -261°C$$

Эта температура существенно ниже температуры кипения азота при атмосферном давлении, поэтому часть азота будет сконденсирована, а часть будет в виде газа. Следовательно, сосуд будет иметь температуру кипения азота $t_к = -196^\circ$ С, а газообразный азот представляет собой насыщенный «азотный пар».

Так как откачивание азота происходит при постоянной температуре (температуре насыщенного «азотного пара» при атмосферном давлении), то «азотный пар» останется насыщенным пока не испарится вся жидкая фракция азота. Поэтому пока в сосуде остается жидкий азот, давление «паров азота» будет равно атмосферному. Следовательно, когда давление азота в сосуде упадет вдвое, весь жидкий азот испарится, и останется только газ. Применяя к нему закон Клапейрона-Менделеева, получим

$$p_1 V = \nu_1 R T_к$$

где $p_1 = 0,5 \cdot 10^5$ Па, ν_1 - количество молей азота, оставшееся в сосуде, $T = 77$ К - температура кипения азота ($77K = -196°C$). Отсюда находим количество вещества азота в сосуде

$$\nu_1 = \frac{p_1 V}{R T_к} = \frac{pV}{2 R T_к} = 0,078 \text{ моль},$$

масса которого равна $m_1 = 0,078 \cdot 28\,(г) = 2,2\,(г)$. Отсюда находим массу азота, который был откачан из сосуда)

$$\Delta m = (\nu - \nu_1)\mu = \left(\nu - \frac{pV}{2RT_к}\right)\mu = 25,8 \text{ г}$$

Критерии оценки задачи
1. Правильно понято, что часть азота находится в сконденсированном состоянии, – 0,5 балла,
2. Доказано, что температура в сосуде равна температуре кипения азота при атмосферном давлении – 0,5 балла,
3. Понято и доказано, что к тому моменту, когда давление упадет вдвое, весь азот испарится – 0,5 балла,
4. Правильно найдена масса откачанного азота – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Если зависимость скорости от координаты представляет собой окружность, то движение тела представляет собой гармонические колебания. Действительно, для гармонических колебаний потенциальная энергия тела является квадратичной функцией координат, поэтому закон сохранения энергии дает

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E \qquad (*)$$

А графиком функции (*) при определенном масштабе для координаты и скорости и является окружность. Поэтому зависимость координаты и скорости (при определенном выборе начала отсчета времени) имеют вид

$$x(t) = x_0 \sin \omega t$$
$$v(t) = x_0 \omega \cos \omega t = v_0 \cos \omega t$$

Из этих формул можно найти циклическую частоту колебаний и ускорение тела. Из второй формулы находим циклическую частоту колебаний

$$\omega = \frac{v_0}{x_0},$$

а, дифференцируя скорость по времени, получаем проекцию ускорения тела на ось x

$$a(t) = -x_0\omega^2 \sin\omega t = -\omega^2 x$$

Из этой формулы следует, что ускорение тела пропорционально его координате, причем коэффициент пропорциональности находится из данных графика в условии задачи. Поэтому для нахождения проекции ускорения нужно найти координату тела в этот момент. Очевидно, что когда координата и скорость тела соответствуют точке c данного в условии задачи графика, то скорость тела составляет половину максимальной скорости, а координата – составляет долю $\sqrt{3}/2$ от максимальной координаты. Отсюда получаем

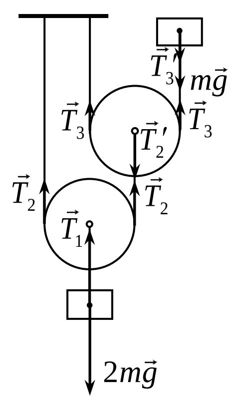
$$a = -\omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2} x_0 = -\left(\frac{v_0}{x_0}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_0^2 x_0$$

Критерии оценки задачи

1. Доказано, что движение тела представляет собой гармоническое колебание – 0,5 балла,
2. По данному графику правильно восстановлены зависимости координаты и скорости тела от времени и найдена частота колебаний – 0,5 балла,
3. Правильно найдена фаза колебаний в рассматриваемый момент времени – 0,5 балла,
4. Правильный ответ для ускорения – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Силы, действующие на тела системы и не блоки, показаны на рисунке (из которого ясны все обозначения). Второй закон Ньютона для тел в проекциях на ось, направленную вертикально вниз, дает



$$\begin{aligned} 2ma_1 &= 2mg - T_1 \\ ma_2 &= T_3 + mg \end{aligned} \qquad (*)$$

Установим условия связи ускорений и сил натяжения. Поскольку левый блок – невесом $T_1 = 2T_2$. Аналогично из условия невесомости второго блока $T_2 = 2T_3$. Отсюда

$$T_1 = 4T_3$$

Для установления связи ускорений рассмотрим малое перемещение тела $2m$. Пусть это тело переместилось вниз на некоторую величину Δx. Тогда на эту же величину переместится вниз и левый блок. Для такого перемещения слева и справа от него потребуются два лишних кусочка веревки длиной Δx. А для этого правый блок должен опуститься вниз на величину $2\Delta x$. Для такого его перемещения слева и справа от него потребуются два кусочка веревки длиной $2\Delta x$. Следовательно, тело m переместится вниз на величину $4\Delta x$. Это значит, что перемещение тела m в любые интервалы времени вчетверо больше перемещения тела $2m$. Поэтому его скорость в любой момент времени вчетверо больше скорости второго тела. А, следовательно, такое же соотношение имеет место и для ускорений

$$a_2 = 4a_1 .$$

В результате система уравнений (*) принимает вид

$$\begin{aligned} 2ma_1 &= 2mg - 4T_3 \\ 4ma_1 &= T_3 + mg \end{aligned}$$

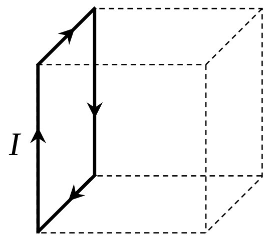
Решая эту систему уравнений, получим

$$a_1 = \frac{1}{3}g \ , \ a_2 = \frac{4}{3}g$$

То что ускорение второго тела оказалось больше ускорения свободного падения подтверждает факт натянутости всех нитей – в противном случае тела падали бы с ускорением g .

Критерии оценки задачи
1. Правильно расставлены силы, правильный второй закон Ньютона для тел системы – 0,5 балла,
2. Правильные условия связи сил – 0,5 балла,
3. Правильные условия связи ускорений – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.



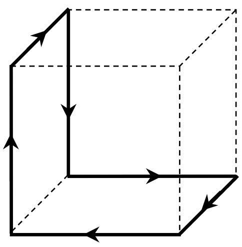
1

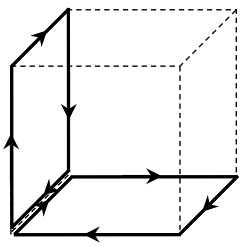
5. Поскольку индуктивность витка, показанного на рисунке 1, равна L_1, то при пропускании через такой виток тока I он будет создавать сам через себя поток магнитной индукции

$$\Phi_1 = L_1 I . \qquad (*)$$

Рассмотрим теперь цепь, показанную на рисунке 2. С одной стороны, поскольку ее индуктивность равна L_2, поток вектора магнитной индукции ее собственного тока через нее при пропускании через нее тока I равен

$$\Phi_2 = L_2 I \qquad (**)$$


2


3

С другой стороны, эту цепь можно заменить эквивалентной цепью (рис. 3), которая содержит два лишних провода, но создает абсолютно такое же магнитное поле как и цепь, показанная на рисунке 3. Последнее связано с тем, что по этим двум проводам текут противоположно направленные токи, поэтому с точки зрения создания магнитного поля цепи, показанные на рисунках 2 и 3, одинаковы. А поток собственного магнитного поля такой цепи через нее саму можно найти как суму потоков поля двух контуров, как на рисунке 1 через них самих, и сумму двух потоков поля таких контуров через расположенный рядом в перпендикулярной плоскости контур такой же площади

$$\Phi_2 = 2\Phi_1 + 2\Phi_{12}$$

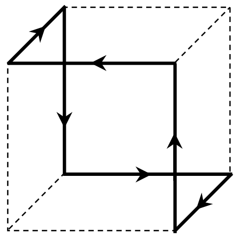
где Φ_{12} - поток магнитного поля квадратного контура через квадратный контур такой же площади, расположенный рядом с ним. Отсюда и формул (*) и (**) находим

$$\Phi_{12} = \left(\frac{L_2}{2} - L_1\right) I \qquad (***)$$

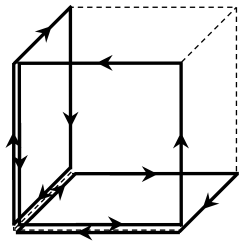
Рассмотрим теперь контур, показанный на рисунке 4. С одной стороны при пропускании через него тока I поток собственного магнитного поля через него самого равен

$$\Phi_3 = L_3 I \qquad (4*)$$

где L_3 - индуктивность этого контура. С другой стороны эту цепь можно заменить эквивалентной цепью, содержащей 6 дополнительных проводов, по которым текут противоположно направленные токи, и которая состоит из трех квадратных контуров как на рисунке 1. Поток собственного магнитного поля через такую цепь равен трем потокам поля квадратного контура через сам себя и шести потокам поля квадратного контура через квадратный контур такой же площади, расположенный рядом с ним. Т.е.



4



5

$$\Phi_3 = 3\Phi_1 + 6\Phi_{12}$$

Поэтому используя формулы (*), (***) и (4*), получим

$$L_3 I = 3L_1 I + 6\left(\frac{L_2}{2} - L_1\right) I$$

Отсюда

$$L_3 = 3\left(L_2 - L_1\right)$$

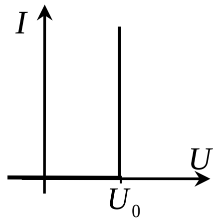
Критерии оценки задачи

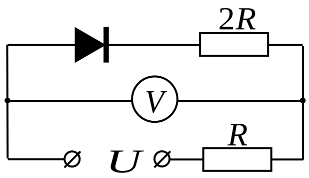
1. Правильная идея решения – связь потоков магнитного поля в трех случаях – 0,5 балла,
2. Правильная связь потока магнитного поля в первом и втором случае – 0,5 балла,
3. Правильная связь потока магнитного поля в первом и третьем случае – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

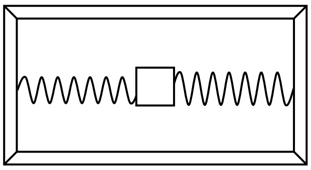
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

Решения и критерии оценивания
Заключительный тур олимпиады Росатом, физика, 11 класс (комплект 2)
2019-2020 учебный год

1. Схема электрической цепи представлена не рисунке. Вольтметр и источник в ней идеальные, вольтамперная характеристика диода (зависимость тока через диод от напряжения на нем) показана на рисунке. Здесь напряжение считается положительным, если падение потенциала происходит в направлении стрелки в обозначении диода. Построить график зависимости показаний вольтметра U_V в зависимости от напряжения на входе цепи U. Найти показания вольтметра при напряжении на входе цепи $5U_0$ (разной полярности). Сопротивления резисторов даны на схеме.

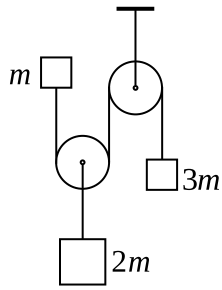


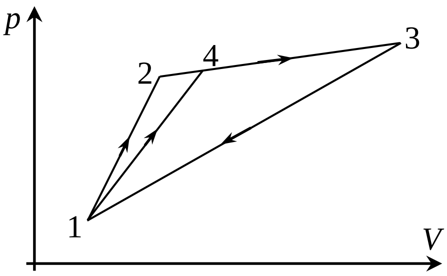




2. Тело прикрепляют с помощью двух пружин, коэффициенты жесткости которых отличаются в два раза, к прямоугольной рамке. При этом тело может двигаться только вдоль длинной стороны рамки. Когда рамку расположили горизонтально (см. рисунок), тело оказалось точно посередине рамки, при этом пружины действуют на тело с силами F. Когда рамку расположили вертикально так, что более жесткая пружина находится вверху, одна из пружин оказалась недеформированной. Найти массу тела. Считать, что для любых деформаций пружин справедлив закон Гука.

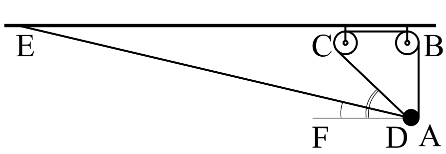
3. Имеется система из трех тел с массами m, $2m$ и $3m$ и двух невесомых блоков, один из которых неподвижный, второй - подвижный. Тела m и $3m$ привязывают к веревке, которую пропускают через блоки, тело $2m$ привязывают к оси подвижного блока. До некоторого момента тела удерживают, а затем отпускают. Найти ускорения тел.





4. С идеальным газом проводят циклический процесс 1-2-3-1, график которого в координатах «давление-объем» представляет собой треугольник, причем прямые 1-2, 2-3 и 1-3 являются возрастающими (см. рисунок). Известно, что термодинамический КПД процесса 1-2-3-1 равен η. Найти КПД процесса 1-4-3-1, если прямая 1-4 делит отрезок 2-3 на части, длины которых 2-4 и 4-3 относятся друг к другу как 1:4 соответственно.

5. Нерастяжимая нить прикреплена к маленькой массивной бусинке в точке A, затем переброшена через блоки B и C, затем пропущена через сквозной отверстие D в той же бусинке, а затем прикреплена к потолку в точке E. Первоначально бусинку удерживают так, что участок нити AB вертикален, $\angle FDE = \alpha$ (отмечен на рисунке одной дугой), $\angle FDC = 3\alpha$ (отмечен на рисунке двумя



дугами). Затем бусинку отпускают. Найти ускорение бусинки сразу после этого. Трения между нитью и стенками отверстия в бусинке отсутствует.

Решения

1. Будем считать приложенное к цепи напряжение положительным, если потенциал левой входной клеммы цепи (см. рисунок в условии задачи) выше потенциала правой, и отрицательным в противоположном случае. При отрицательном напряжении ток через источник не течет, поскольку диод закрыт, а вольтметр идеален. Поэтому вольтметр показывает напряжение источника U: $U_V = U$.

Если к входу цепи приложено отрицательное напряжение, величиной меньше U_0, диод по-прежнему закрыт, ток через источник не течет, вольтметр показывает напряжение источника U. Как только напряжение источника U станет большим положительного значения U_0, диод открывается и пропускает через себя такой ток I, при котором сумма падений напряжения на резисторах равняется $U - U_0$

$$3IR = U - U_0$$

Отсюда находим ток в цепи

$$I = \frac{U - U_0}{3R}$$

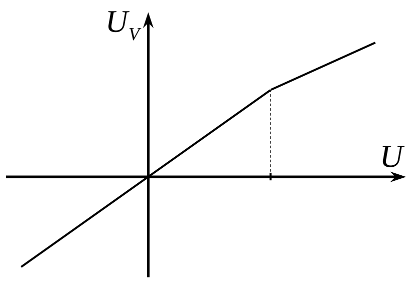
При этом вольтметр показывает напряжение на диоде (U_0) и на резисторе $2R$, т.е.

$$U_V = U_0 + 2RI = \frac{2}{3}U + \frac{1}{3}U_0$$

Таким образом

$$U_V = \begin{cases} U, \quad U < U_0 \\ U_V = \dfrac{2}{3}U + \dfrac{1}{3}U_0, \quad U > U_0 \end{cases} \qquad (*)$$

График зависимости $U_V(U)$ приведен на рисунке. При напряжении источника $\pm 5U_0$ показания вольтметра находим из формулы (*):



при $U = -5U_0$, $\quad U_V = U = -5U_0$

при $U = 5U_0$, $\quad U_V = U = (11/3)U_0$

Критерии оценки задачи

1. Правильные принципы работы с вольтамперными характеристиками нелинейных элементов - 0,5 балла
2. Найдена зависимость показаний вольтметра от напряжения источника в случае закрытого диода – 0,5 балла,
3. Понято, когда диод будет открываться и найдено напряжение вольтметра при открытом диоде – 0,5 балла,
4. Правильный ответ, правильный график – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Условию задачи не противоречат два положения – когда в горизонтальном положении пружины растянуты или сжаты.

Рассмотрим первый случай: в горизонтальном положении пружины растянуты. Тогда, поскольку при перевороте рамки в вертикальное положение растяжение нижней пружины должно уменьшиться, а верхней – увеличиться, то именно нижняя пружина будет не деформирована, а груз будет удерживать верхняя пружина. Поскольку величина укорочения нижней пружины равна величине удлинения верхней (при перевороте рамки), то со стороны нижней пружины пропадает сила F)эта пружина станет недеформированной), а со стороны верхней добавляется сила $2F$. Отсюда заключаем, что

$$m=\frac{3F}{g}$$

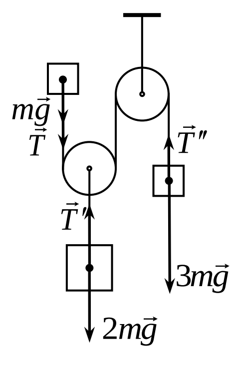
Второй случай: в горизонтальном положении обе пружины сжаты. Тогда в вертикальном положении недеформированной будет верхняя пружина, а силу тяжести компенсировать нижняя. При этом поскольку при перевороте рамки дополнительное удлинение верхней пружины равно дополнительному укорочению нижней, к силе упругости нижней пружины F за счет ее дополнительной деформации добавится сила $F/2$ (поскольку коэффициент жесткости нижней пружины вдвое меньше). Поэтому

$$m=\frac{3F}{2g}$$

Таким образом, масса тела может принимать два значения

$$m_1=\frac{3F}{g} \text{ и } m_2=\frac{3F}{2g}$$

Критерии оценки задачи
1. Правильно использован закон Гука – 0,5 балла,
2. Правильно рассмотрен случай вертикальной рамки, когда в горизонтальном положении пружины были сжаты – 0,5 балла,
3. Правильно рассмотрен случай вертикальной рамки, когда в горизонтальном положении пружины были растянуты – 0,5 балла,
4. Правильные ответы – 0,5 балла (если участник рассмотрел только один случай, его максимальная оценка за задачу не превышает 1 балла).
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.



3. На каждое тело действуют сила тяжести и сила натяжения веревки. Поэтому второй закон Ньютона для всех тел в проекции на ось, направленную вертикально вниз, дает

$$\begin{cases} ma_1 = T + mg \\ 2ma_2 = 2mg - 2T \\ 3ma_3 = 3mg - T \end{cases}$$

Здесь a_1, a_2 и a_3 - ускорения тел массой m, $2m$ и $3m$ соответственно, T - сила натяжения веревки, привязанной к телам массой m и $3m$, $2T$ - сила нятяжения веревки, привязанной к телу $2m$. Умножая первое уравнение на 2 и складывая его со вторым, а последнее уравнение на 2 и вычитая из него второе уравнение, получим уравнения, в которые не входит сила натяжения веревки

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 = 2g \\ 3a_3 - a_2 = 2g \end{aligned} \qquad (*)$$

Получим уравнение связи ускорений. Если тело m совершило перемещение Δx_1, а тело $2m$ - перемещение Δx_2, направленное вниз, то слева от неподвижного блока потребуется кусок веревки длиной $2\Delta x_2$ и освободится кусок веревки длиной Δx_1. Поэтому тело $3m$ совершит перемещение $\Delta x_1 - 2\Delta x_2$, направленное вертикально вниз. А это значит, что

$$a_3 = a_1 - 2a_2 \qquad (**)$$

Решая систему уравнений (*), (**), получим

$$a_1 = \frac{8}{5}g, \qquad a_2 = \frac{2}{5}g, \qquad a_3 = \frac{4}{5}g$$

Все ускорения получились положительными, что означает, что направления ускорений были выбраны верными – все тела движутся вниз.

Критерии оценки задачи

1. Правильно расставлены силы, действующие на тела системы – 0,5 балла,
2. Правильные законы Ньютона для всех тел – 0,5 балла,
3. Правильные условия связи сил и ускорений – 0,5 балла,
4. Правильные ответы – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Поскольку все участки процессов – растущие прямые, на каждом из них газ контактирует либо только с нагревателем (и получает положительное тепло), либо только с холодильником (отдает положительное тепло). Очевидно, что в процессе 1-2-3-1 контакт с нагревателем имеет место в процессах 1-2 и 2-3, контакт с холодильником – в процессе 3-1. Поэтому

$$\eta = \eta_{1231} = \frac{A_{1-2-3-1}}{Q_{1-2-3}}$$

где $A_{1-2-3-1}$ - работа газа за цикл 1-2-3-1, Q_{1-2-3} - количество теплоты, полученное газом в процессе 1-2-3. Эту же формулу можно переписать через количество теплоты, отданное холодильнику. Поскольку тепло отдается холодильнику в процессе 3-1, а $A_{1-2-3-1} = Q_{1-2-3} - Q_{3-1}$, где Q_{3-1} - количество теплоты, переданное холодильнику в процессе 3-1, то

$$\eta_{1231} = \frac{A_{1-2-3-1}}{A_{1-2-3-1} + Q_{3-1}} = \frac{1}{1 + \left(Q_{3-1} / A_{1-2-3-1}\right)} \qquad (*)$$

Так как треугольники 123 и 143 имеют одинаковую высоту, а основание треугольника 143 составляет 4/5 от основания треугольника 123, то площадь треугольника 143 составляет 4/5 от площади треугольника 123. Поэтому работа газа в цикле 1-4-3-1 составляет 4/5 от работы газа в цикле 1-2-3-1

$$A_{1-4-3-1} = \frac{4}{5} A_{1-2-3-1}$$

А поскольку в циклах 1-2-3-1 и 1-4-3-1 одинаковый участок, где происходит контакт с холодильником, то количество теплоты, переданное в них холодильнику, одинаковое. Поэтому для КПД цикла 1-4-3-1 имеем

$$\eta_{1431} = \frac{(4/5) A_{1-2-3-1}}{(4/5) A_{1-2-3-1} + Q_{3-1}} = \frac{(4/5)}{(4/5) + \left(Q_{3-1} / A_{1-2-3-1}\right)} \qquad (**)$$

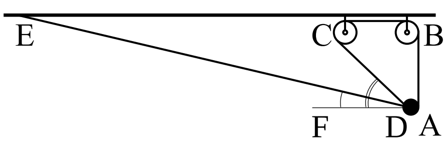
Выражая отношение $Q_{3-1} / A_{1-2-3-1}$ из формулы (*) и подставляя его в (**), получим

$$\eta_{1431} = \frac{(4/5) A_{1-2-3-1}}{(4/5) A_{1-2-3-1} + Q_{3-1}} = \frac{4\eta_{1-2-3-1}}{5 - \eta_{1-2-3-1}} = \frac{4\eta}{5 - \eta}$$

Критерии оценки задачи

1. Использовано правильное определение термодинамического КПД двигателя – 0,5 балла,
2. Понято, что в двух рассматриваемых циклах одинаковые участки, на которых газ отдает тепло холодильнику, в результате чего в двух циклах количество теплоты, отданное холодильнику одинаково – 0,5 балла,
3. Правильные связи работ, совершенных двигателями за цикл – 0,5 балла,
4. Правильные ответы – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.



5. Найдем, как движется бусинка. Пусть скорость бусинки v и направления она так, как показано на рисунке. Тогда, поскольку нить нерастяжима, сумма проекций скорости бусинки на направления всех ниток, которые к ней привязаны, должна быть равна нулю. Поэтому, если скорость бусинки направлена под углом x к горизонтали, то

$$v\cos(x + \alpha) + v\cos(x + 3\alpha) + v\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

где v - скорость бусинки. Отсюда

$$\cos(x + \alpha) + \cos(x + 3\alpha) = \sin x \qquad (*)$$

Используя формулы сложения тригонометрических функций, получим

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\cos\alpha + \cos 3\alpha}{1 + \sin\alpha + \sin 3\alpha} \qquad (**)$$

Это равенство определяет направление движения бусинки в первый момент времени, причем угол x, определяемый равенством (**) - острый, поскольку все тригонометрические функции в (**) – положительны.

Очевидно, ускорение бусинки определяется проекцией ускорения свободного падения на направление движения бусинки (**), а силы натяжения нити не оказывают никакого влияния на это ускорение. Действительно, во второй закон Ньютона в проекции на направление движения бусинки войдет сумма

$$T\cos(x+\alpha)+T\cos(x+3\alpha)+T\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

(T - сила натяжения нити) которая равна нулю в соответствии с (*). Поэтому ускорение бусинки есть

$$a=g\sin x$$

где

$$x=\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{1+\sin\alpha+\sin 3\alpha}\right)$$

Выражая синус через тангенс, можно получить еще одно выражение для ответа

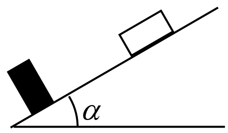
$$a=g\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\sqrt{(1+\sin\alpha+\sin 3\alpha)^2+(\cos\alpha+\cos 3\alpha)^2}}=g\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\sqrt{3+2\sin\alpha+2\sin 3\alpha+2\cos 2\alpha}}$$

Критерии оценки задачи

1. Использовано утверждение, что сумма проекции скорости бусинки на нитки равна нулю – 0,5 балла,
2. Правильно найдено направление движения бусинки в первый момент времени после ее отпускания – 0,5 балла,
3. Доказано, что силы натяжения не совершают работу – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

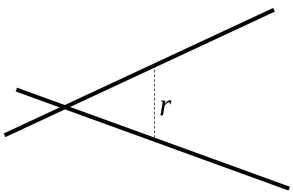
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

Решения и критерии оценивания
Заключительный тур олимпиады Росатом, физика, 11 класс (комплект 3)
2019-2020 учебный год

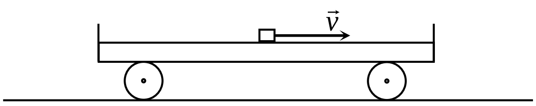


1. На наклонной плоскости с углом наклона α находится маленькое тело. На расстоянии l от тела находится упругая стенка. Коэффициент трения между телом и плоскостью k ($k = (1/2)\text{tg}\,\alpha$). Тело отпускают. Оно скользит по плоскости вниз, отражается от стенки, поднимется, снова движется в направлении стенки, снова отражается и т.д. Какой путь пройдет тело к моменту его полной остановки. Столкновения тела со стенкой упругие.

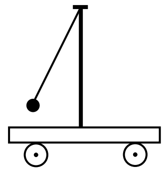
2. В некотором тепловом процессе объем одноатомного идеального газа зависит от температуры по закону $V = \alpha T^{-(5/2)}$, где α - известная постоянная. Найти молярную теплоемкость газа в этом процессе. Получает или отдает газ теплоту, если его объем возрастает?

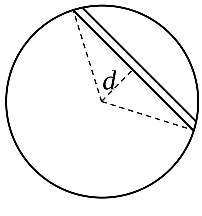


3. Имеются две диэлектрических бесконечно длинных нити. Нити равномерно заряжены одноименными зарядами с линейной плотностью λ и 2λ. Нити расположили перпендикулярно друг другу в разных плоскостях, причем расстояние между их ближайшими точками равно r. Найти силу взаимодействия нитей. Ответ обосновать.



4. На горизонтальном столе покоится игрушечная тележка массой M и длиной L с высокими бортиками. В центре тележки находится точечное тело массой m. В некоторый момент времени телу толчком сообщили скорость v в направлении переднего бортика тележки (см. рисунок). Испытав упругое столкновение с передним бортиком, тело отражается в направлении заднего бортика, стукнувшись о него – в направлении переднего и т.д. Какой путь пройдет тележка к тому моменту, когда тело окажется в центре тележки, испытав 2020 столкновений с ее бортиками.





5. На тележке укреплен математический маятник длины l. Тележку отпускают в туннель, прокопанный внутри Земли по такой хорде, что минимальное расстояние от центра Земли до туннеля равно половине радиуса Земли $d = R/2$ (R - радиус Земли; см. рисунок). Сколько колебаний совершит маятник за то время, когда тележка пройдет весь туннель. Радиус и масса Земли R и ускорение свободного падения на поверхности Земли известны. Плоскость колебаний маятника совпадает с направлением движения тележки.

Решения

1. Поскольку $k < \mathrm{tg}\,\alpha$, то тело будет скользить по плоскости и окончательно остановится только около стенки. При этом, несмотря на подъемы и спуски по плоскости, работа силы тяжести будет равна убыли потенциальной энергии тела, т.е. $A_m = mgl\sin\alpha$. Из теоремы об изменении кинетической энергии заключаем, что эта работа равна минус работе силы трения, которая определяется пройденным телом путем $A_{mp} = -F_{mp}S = -kmg\cos\alpha S$. Отсюда заключаем, что пройденный телом путь есть

$$S = \frac{1}{k} l\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2l$$

Критерии оценки задачи

1. Использована теорема об изменении кинетической энергии для тела – 0,5 балла,
2. Доказано, что суммарная работа силы тяжести равна $A_m = mgl\sin\alpha$ независимо от того, сколько подъемов и спусков совершило тело – 0,5 балла,
3. Правильное выражение для силы трения на наклонной плоскости при движении тела, правильная работа силы трения – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Пусть газ получает в рассматриваемом процессе малое количество теплоты δQ, а изменение температуры газа составило ΔT (обе эти величины являются алгебраическими, могут быть как положительными, так и отрицательными). Первый закон термодинамики для рассматриваемого процесса дает

$$\delta Q = \Delta U + \delta A$$

Поскольку в рассматриваемом процессе давление практически не изменилось, работу газа можно найти как $\delta A = p\Delta V$, где ΔV - изменение объема в рассматриваемом процессе, p - давление в рассматриваемом состоянии. Поэтому

$$\delta Q = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + p\Delta V \qquad (*)$$

Изменение объема газа ΔV можно найти из зависимости $V(T)$, давление газа p – из закона Клапейрона-Менделеева

$$\Delta V = \frac{dV}{dT}\Delta T = -\frac{5}{2}\alpha T^{-(7/2)}\Delta T, \qquad p = \frac{\nu RT}{V}$$

Поэтому из (*) получаем связь количество теплоты и изменения температуры в рассматриваемом процесс

$$\delta Q = -\nu R\Delta T$$

И, следовательно, молярную теплоемкость

$$C = \frac{\delta Q}{\nu\Delta T} = -R$$

(от α молярная теплоемкость не зависит). Теплоемкость газа оказалась отрицательной, что означает, что процесс лежит «между» изотермой и адиабатой. Если объем газа возрастает, то, как следует из связи давления и температуры, температура газа уменьшается - $\Delta T < 0$, и, следовательно, газ получает теплоту.

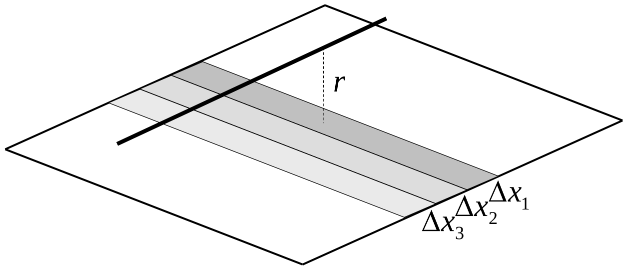
Критерии оценки задачи

1. Использовано правильное определение теплоемкости – 0,5 балла,

2. Для рассматриваемого процесса правильно использовано первое начало термодинамики – 0,5 балла,
3. Правильный ответ для теплоемкости газа – 0,5 балла,
4. Правильный ответ на вопрос о том, получает или отдает газ тепло при увеличении его объема – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Рассмотрим вспомогательную задачу. Найдем силу взаимодействия очень длинной нити с линейной плотностью заряда λ и очень большой плоскости с поверхностной плотностью заряда σ. С одной стороны (поскольку сила взаимодействия плоскости с поверхностной плотностью σ и точечного заряда q есть $\sigma q / 2\varepsilon_0$) эта сила равна



$$F = \frac{\sigma \lambda l}{2\varepsilon_0} \qquad (*)$$

где l - длина нити. С другой стороны, если мысленно разбить плоскость на длинные полоски толщиной Δx_1, Δx_2, …, перпендикулярные нити (см. рисунок), то эта же сила складывается из сил взаимодействия с каждой полоской.

$$F = \Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 + ... \qquad (*)$$

Причем в этой формуле суммируются не векторы, а модули, поскольку силы взаимодействия нити с каждой полоской направлены одинаково (отталкивание от полосок). А поскольку полоски и нить – очень-очень большие, то все полоски по отношению к нити расположены одинаково, и, следовательно, силы взаимодействия с разными полосками $\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3, ...$ могут отличаться только из-за разных зарядов полосок. А поскольку их заряды пропорциональны их толщине (при условии, что полоски – тонкие), то все эти силы можно записать как

$$\Delta F_i = f_0 \Delta x_i$$

где величина f_0 одинакова для каждой полоски. Подставляя это выражение в формулу для силы взаимодействия (**) и используя (*), найдем

$$\frac{\sigma\lambda l}{2\varepsilon_0} = \Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 + ... = f_0 \Delta x_1 + f_0 \Delta x_2 + f_0 \Delta x_3 + ... = f_0 l$$

Отсюда

$$f_0 = \frac{\sigma\lambda}{2\varepsilon_0}$$

Поэтому сила взаимодействия нити с линейной плотностью заряда λ с полоской толщиной Δx равна

$$F = \frac{\lambda\sigma\Delta x}{2\varepsilon_0} \qquad (***)$$

Но поскольку полоска тонкая, а $\sigma\Delta x$ есть заряд единицы длины полоски, то линейная плотность заряда полоски есть $\lambda_1 = \sigma\Delta x$. Поэтому формула (***) дает силу взаимодействия двух перпендикулярных нитей, равномерно заряженных с линейной плотностью λ и λ_1.

$$F = \frac{\lambda\lambda_1}{2\varepsilon_0}$$

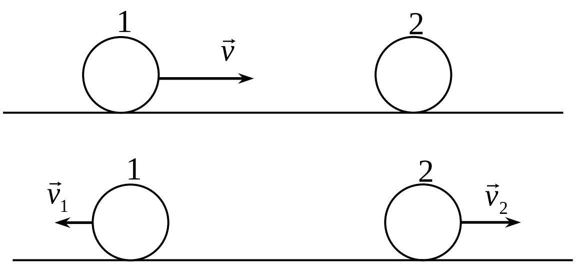
Поскольку в рассматриваемой задаче $\lambda_1 = 2\lambda$, получаем окончательно

$$F = \frac{2\lambda^2}{2\varepsilon_0}$$

От расстояния между нитями эта сила не зависит.

Критерии оценки задачи
1. Использовано правильное выражение для поля бесконечной заряженной плоскости или бесконечной заряженной нити – 0,5 балла,
2. Правильное сведение взаимодействия двух нитей к взаимодействию плоскости и нити (или правильное сведение взаимодействия двух нитей к интегралу) – 0,5 балла,
3. Нахождение взаимодействия нити с каждым участком плоскости (или вычисление соответствующего интеграла) – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла.
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Докажем, что при лобовом упругом столкновении тел их относительная скорость не меняется по величине, а меняет только направление. Пусть одно тело массой m движется со скоростью $\vec{v}$, второе массой M покоится (относительная скорость тел первого тела относительно второго равна $v_{отн} = v$ и направлена вправо; см. рисунок). Скорости тел после центрального упругого столкновения можно найти по законам сохранения импульса и энергии (пусть для определенности $m < M$, тогда скорость первого тела направлена противоположно скорости $\vec{v}$):



$$mv = -mv_1 + Mv_2$$
$$mv^2 = mv_1^2 + Mv_2^2$$

Отсюда находим скорости тел после столкновения

$$v_1 = \frac{M-m}{M+m}v\,,\ v_2 = \frac{2m}{M+m}v$$

и относительную скорость первого тела относительно второго

$$v_{отн} = v_1 - v_2 = v$$

Отсюда с учетом того, что v_1 поменяла направление, заключаем, что относительная скорость такая же по величине, но направлена противоположно. При следующем столкновении с бортиками тележки такая же картина сохранится.

Теперь вернемся к решению задачи. Поскольку система тел – «тележка-тело» замкнута, центр масс тела и тележки движется с постоянной скоростью

$$v_0 = \frac{mv}{m+M}\,.$$

В начале (поскольку тело находится в центре тележки) центр масс системы находится в центре тележки. В конце (поскольку тело снова в центре) там же находится и центр масс. Поэтому перемещение тележки равно перемещению центра масс системы за то время, за которое тело совершило 2020 столкновений с бортиками. Т.е.

$$S_m = \frac{mv}{m+M}t$$

Где t - время, прошедшее от толчка тела до того как оно вернулось в ту же точку, испытав 2020 столкновений с бортиками. Найдем это время. От 1-го столкновения до 2020-го тело пройдет 2019 длин тележки с одной и той же относительной скоростью. Поэтому затратит на это время

$$\frac{2019l}{v}$$

И еще два раза по половине тележки – после начального толчка до первого удара, и от 2020 удара до попадания в центр тележки. В результате находим, что

$$t = \frac{2020l}{v}$$

Отсюда получаем окончательно

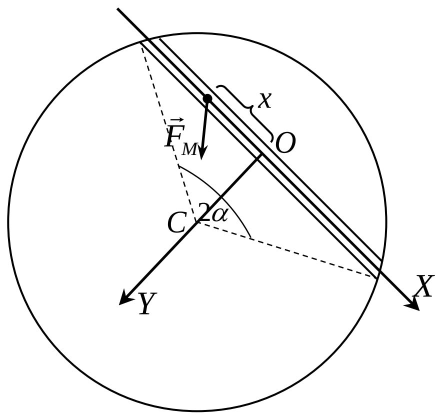
$$S_m = \frac{2020ml}{m+M}$$

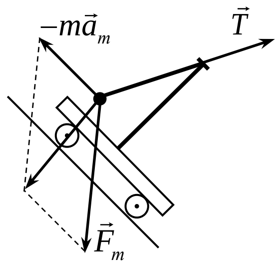
Критерии оценки задачи

1. Использование законов сохранения энергии и импульса для упругого столкновения – 0,5 балла,
2. Доказательство, что относительная скорость тел при столкновении не меняется (или нахождение скорости тележки тела после столкновения) – 0,5 балла,
3. Сведение вычисления пройденного тележкой пути к пути, пройденного центром масс системы (или вычисление пути, пройденного тележкой между каждой парой столкновений) – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

5. Пусть туннель «опирается» на угол 2α (см. рисунок). Как известно, на тело массой m, находящееся внутри Земли на расстоянии r от ее центра, действует направленная к центру Земли сила тяжести





$$F_m = \frac{mgr}{R}$$

где mg - сила тяжести, действующая на тело на поверхности Земли, R - радиус Земли. Применяя второй закон Ньютона к тележке, найдем, что ее ускорение a_m направлено вдоль туннеля и равно по величине

$$a_m = \frac{F_{m,x}}{m} = \frac{gr_x}{R} \qquad (1)$$

где F_x - проекция силы тяжести на ось OX, направленную вдоль туннеля (см. рисунок), m - масса тележки. Поскольку $r_x = x$, из уравнения (1) следует, что ускорение тележки пропорционально расстоянию от нее до точки O (ближайшей к центру точки туннеля); это значит, что тележка (вместе с маятником на ней) будет совершать гармонические колебания относительно точки O с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (2)$$

Следовательно, до противоположной точки туннеля тележка доедет за половину периода (2)

$$t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (3)$$

(причем независимо от того, на какой угол «опирается» туннель).

Второй закон Ньютона для маятника имеет вид

$$m_0\vec{a}_м = \vec{F}_m + \vec{T}$$

где m_0 - масса маятника, $\vec{a}_м$ - его ускорение в инерциальной системе отсчета (например, относительно Земли), $\vec{T}$ - сила натяжения нити. Но поскольку маятник колеблется на тележке, которая движется с ускорением, нам нужно найти его ускорение относительно тележки $\vec{a}_{м.о.т.}$. Используя далее, закон, аналогичный закону сложения скоростей (но для ускорений) - $\vec{a}_м = \vec{a}_{м.о.т.} + \vec{a}_m$, получим

$$m_0\vec{a}_{м.о.т.} = \vec{F}_m + \vec{T} - m_0\vec{a}_m \qquad (4)$$

(для знакомых с понятием сил инерции отметим, что уравнение (4) является вторым законом Ньютона в неинерциальной системе отсчета, связанной с тележкой, а $-m_0\vec{a}_m$ и есть действующая на маятник сила инерции). Но с учетом (1) величина $m_0\vec{a}_m$ есть проекция действующей на маятник силы тяжести на ось x, поэтому вектор $\vec{F}_m - m_0\vec{a}_m$ направлен перпендикулярно туннелю, а его величина равна проекции силы тяжести на ось OY, перпендикулярную туннелю. Поэтому модуль этого вектора равен

$$\left|\vec{F}_m - m_0\vec{a}_m\right| = \frac{m_0 g r_y}{R} = \frac{m_0 g\, OC}{R} = m_0 g \cos\alpha \qquad (5)$$

и не меняется в процессе движения тележки по туннелю (см. рисунок). Из уравнений (4)-(5) следует, что уравнение для ускорения маятника относительно тележки совпадает с уравнением для ускорения математического маятника, но в качестве «силы тяжести» в нем фигурирует постоянная сила $m_0 g \cos\alpha$. А это значит, что маятник будет совершать колебания с периодом

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$$

Поэтому за время t (3) маятник совершит следующее количество колебаний

$$N = \frac{t}{T} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R\cos\alpha}{l}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{l}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{2l}}$$

Критерии оценки задачи
1. Правильно найдена или использована сила тяжести, действующая на тележку внутри Земли – 0,5 балла,
2. Доказано, что движение тележки по шахте представляет собой гармоническое колебание и правильно найден его период – 0,5 балла,
3. Правильно найдено ускорение маятника относительно тележки – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла,
Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.