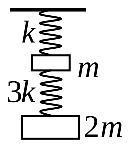
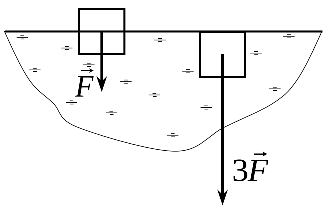
Отборочный тур
Отраслевой физико-математической олимпиады «Росатом»,
2019-2020 учебный год,
физика, 10 класс

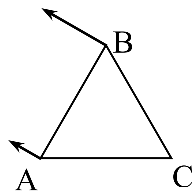


1. К телу массой m прикрепили пружину с жесткостью k, второй конец которой прикрепили к потолку. К телу прикрепили еще одну пружину с жесткостью $3k$, к ней подвесили тело массой $2m$. Нижнее тело опустилось на величину ΔL по сравнению со случаем не деформированных пружин. Насколько опустится нижнее тело, если поменять местами и пружины, и тела?

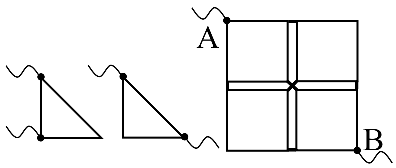
2. В кастрюлю налили водопроводную воду и поставили кастрюлю на плиту. Через время $t = 30$ мин вода закипела. В кастрюлю долили еще какое-то количество водопроводной воды. Температура воды в кастрюле понизилась при этом на $\Delta T = 12°$. Через время $t_1 = 5$ мин после этого вода снова закипела. Найти температуру водопроводной воды. Потерями тепла пренебречь.



3. Кубик плавает в воде. Чтобы кубик был погружен в воду наполовину, к нему необходимо приложить силу F, направленную вниз. Чтобы полностью погрузить в воду – силу $3F$, направленную вниз. Найти плотность вещества кубика. Плотность воды ρ_0 известна.



4. Вырезанный из листа фанеры равносторонний треугольник ABC скользит по горизонтальному столу. В некоторый момент времени скорости вершин A и B перпендикулярны стороне AB и равны v и $3v$ соответственно (см. рисунок, вид сверху). Найти величину скорости вершины C в этот момент.



5. Из металлической пластинки вырезали прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами a. Если включить треугольник в электрическую цепь так, как показано на левом рисунке, его сопротивление равно r, а если как на среднем - R. Из той же пластинки вырезали четыре квадрата со стороной a и соединили по углам проволочками с нулевым сопротивлением (правый рисунок). Найти сопротивление между точками A и B.

Решения

1. Высота опускания нижнего тела равна сумме удлинений пружин. При этом нижняя пружина растягивается нижним телом $2m$, верхняя – обоими телами $2m + m = 3m$. Отсюда находим высоту опускания нижнего тела

$$\Delta L = \frac{3mg}{k} + \frac{2mg}{3k} = \frac{11mg}{3k}$$

Если поменять местами и пружины, и тела, то вместо этой формулы получим

$$\Delta L_1=\frac{3mg}{3k}+\frac{mg}{k}=\frac{2mg}{k}=\frac{6}{11}\Delta L$$

Критерии оценки задачи (Максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильно использован закон Гука для нахождения удлинения пружин – 0,5 балла
2. Правильно найдены растягивающие силы и величина опускания нижнего груза – 0,5 балла
3. Правильно найдена величина опускания нижнего груза при перемене пружин и тел – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

2. Пусть масса воды в кастрюле равна m. Уравнение теплового баланса для нагревания воды от температуры водопровода до температуры кипения дает

$$Pt=cm\left(T_к-T_0\right) \qquad (*)$$

где P - мощность нагревателей плиты, c - удельная теплоемкость воды, T_0 - температура водопроводной воды, $T_к$ - температура кипения (поскольку входит разность температур, температуры можно задавать в градусах Цельсия).

Уравнение теплового баланса для доливания дополнительной водопроводной воды в кастрюлю дает (поскольку дополнительная вода нагрелась от температуры водопровода до температуры на ΔT меньшей температуры кипения

$$cm_1\left(T_к-\Delta T-T_0\right)=cm\Delta T$$

где m_1 - масса дополнительной воды. Отсюда находим

$$m_1=\frac{m\Delta T}{T_к-\Delta T-T_0} \qquad (**)$$

Уравнение теплового баланса для нагревания воды массой $m+m_1$ от температуры, меньшей на ΔT температуры кипения, до температуры кипения дает

$$Pt_1=c\left(m+m_1\right)\Delta T$$

Находя из формулы (**) массу $m+m_1$

$$m+m_1=m\left(1+\frac{\Delta T}{T_к-\Delta T-T_0}\right)=m\frac{T_к-T}{T_к-\Delta T-T_0},$$

получим для нагревания воды массой $m+m_1$

$$Pt_1=\frac{cm\left(T_к-T\right)\Delta T}{T_к-\Delta T-T_0} \qquad (***)$$

Деля теперь уравнение (*) на уравнение (***), найдем

$$T_0=T_к-\frac{t+t_1}{t_1}\Delta T=16°C$$

Критерии оценки задачи (Максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Использовано правильное соотношение для времени нагревания первоначальной воды – 0,5 балла
2. Правильное уравнение теплового баланса для доливания воды – 0,5 балла
3. Правильное уравнение для нагревания кастрюли с долитой водой – 0,5 балла

5. Правильное решение полученного уравнения и правильный ответ для начальной температуры воды – 0,5 балла

3. Пусть свободно плавающий кубик погружается в воду на глубину h. Тогда условие равновесия кубика дает

$$\rho g a^3 = \rho_0 g a^2 h \qquad (*)$$

где ρ - плотность вещества кубика, a - длина его ребра. Отсюда находим отношение плотностей кубика и воды

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{h}{a} \qquad (**)$$

Когда на плавающий кубик действует «утапливающая» сила F, условие равновесия дает

$$\rho g a^3 + F = \rho_0 g V_{п.ч.}$$

где $V_{п.ч.}$ - объем погруженной части кубика. Поскольку $V_{п.ч.} = a^2\left(h + \Delta h\right)$, где Δh - глубина «притопления» кубика силой F дополнительно к его погружению за счет силы тяжести. Отсюда с учетом (*) получаем

$$F = \rho_0 g a^2 \Delta h$$

Поэтому для равновесных положений кубика, данных в задаче, имеем

$$\begin{aligned} F &= \rho_0 g a^2\left(\frac{a}{2} - h\right) = \rho_0 g a^3\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{a}\right) \\ 3F &= \rho_0 g a^2\left(a - h\right) = \rho_0 g a^3\left(1 - \frac{h}{a}\right) \end{aligned} \qquad (***)$$

Деля уравнения (***) друг на друга, получаем

$$\frac{2}{3} = \frac{1-2x}{1-x}$$

где $x = h/a$. Отсюда находим

$$x = \frac{1}{4}$$

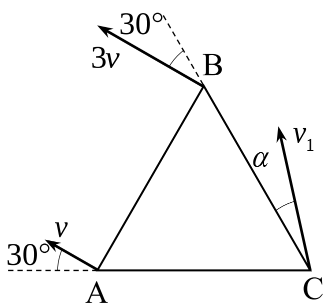
А затем из формулы (**) плотность кубика

$$\rho = \frac{\rho_0}{4} = 250 \text{ кг/м}^3.$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Использованы правильные соотношения для силы Архимеда – 0,5 балла
2. Правильное использование условий плавания – равенство силы тяжести и архимедовой силы – 0,5 балла
3. Правильное использование условия плавания при действии на кубик «утапливающей» силы – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

4. При движении жесткого стержня справедливо условие нерастяжимости стержня – проекции скорости его концов на стержень одинаковы. Используем это условие для сторон треугольника AC и BC.

Пусть v_1 - скорость вершины C, и угол между вектором $\vec{v}_1$ и стороной BC - α. Тогда из условия нерастяжимости сторон AC и BC получим



$$\begin{aligned} v\cos 30^\circ &= v_1 \cos\left(\alpha + 60^\circ\right) \\ 3v\cos 30^\circ &= v_1 \cos\alpha \end{aligned} \qquad (*)$$

Деля уравнения друг на друга и используя формулу сложения косинуса, найдем

$$\frac{1}{3} = \frac{\cos\alpha\cos 60^\circ - \sin\alpha\sin 60^\circ}{\cos\alpha}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\cos 60^\circ - 1}{3\sin 60^\circ} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Поэтому

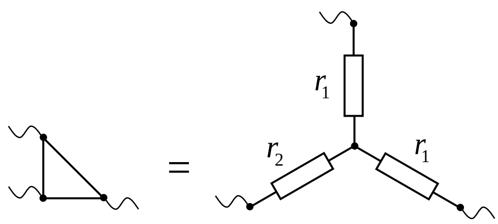
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

И из второй формулы (*) находим

$$v_1 = \frac{3v\cos 30^\circ}{\cos\alpha} = \sqrt{7}v$$

Критерии оценки задачи (Максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Использовано правильное условие движения жесткого предмета – 0,5 балла
2. Правильное соотношение скоростей вершин A и B – 0,5 балла
3. Правильное соотношение скоростей вершин A и C – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

5. Поскольку треугольник содержит три вывода, но не содержит активных элементов, он эквивалентен некоторой «звезде» из трех сопротивлений (см. рисунок). Сопротивления r_1 и r_2 найдем из данных условия

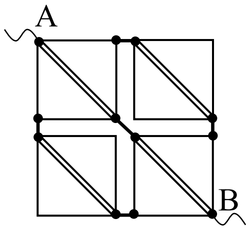


$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= r \\ 2r_1 &= R \end{aligned} \qquad (*)$$

Отсюда

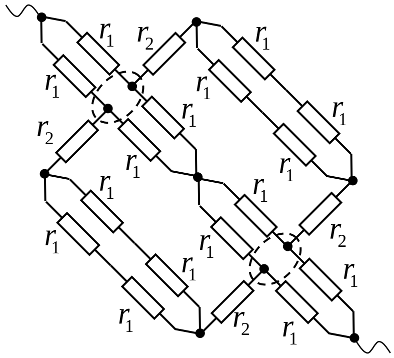
$$r_1 = \frac{R}{2}, \qquad r_2 = r - \frac{R}{2}$$

(отметим, что для данных условия должно быть выполнено неравенство $2r > R$).

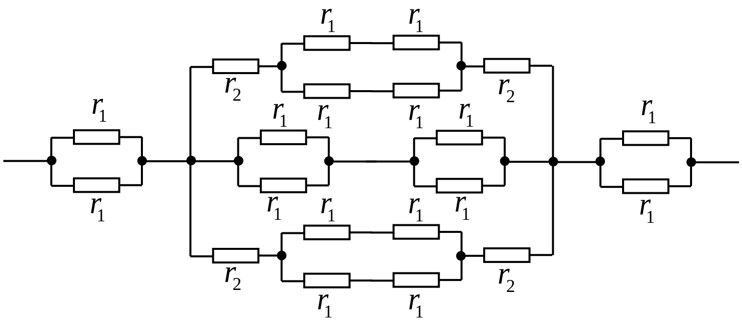


Теперь возвращаемся к данной в условии цепи. Поскольку она симметрична относительно прямой AB, ток по перемычке, связывающей левый нижний и правый верхний квадраты не течет, и ее можно удалить из цепи. Более того, если сделать разрезы вдоль диагоналей квадратов так, как показано на рисунке, сохранив только соединение образовавшихся треугольников в вершинах (см. рисунок), сопротивление цепи не изменится, поскольку в первоначальной цепи токи нигде не будут пересекать эти диагонали.

Ну а поскольку каждый треугольник эквивалентен «звезде», то данную цепь можно представить в виде



Соединяя теперь точки имеющие одинаковый потенциал, видим, что данная цепь эквивалентна следующей цепи



Находя ее сопротивление, получим для сопротивления данной цепи

$$X = r_1 + \frac{r_1\left(2r_2 + r_1\right)}{2r_2 + 3r_1} = \frac{r_1\left(4r_2 + r_1\right)}{2r_2 + 3r_1}$$

Используя формулы (*) получаем окончательно для сопротивления данной цепи

$$X = \frac{R\left(8r - 3R\right)}{2\left(4r + R\right)}$$

Критерии оценки задачи (Максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – замена треугольника звездой – 0,5 балла
2. Нахождение параметров этой звезды – 0,5 балла
3. Правильное соединение или разрыв точек с одинаковым потенциалом и сведение цепи к неразветвленной – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 10.