Отборочный тур олимпиады Росатом, физика,
11 класс
2018-2019 учебный год, комплект 2

1. Тело на нити, второй конец которой закреплен, вращается в вертикальной плоскости. Известно, что максимальная и минимальная скорости тела отличаются в 2 раза. Найти минимальное ускорение тела. $g=10$ м/с^2.

Решение. Поскольку скорость тела максимальна в нижней точке траектории, то в ней максимально и его ускорение. Ускорение минимально в верхней точке траектории. Поскольку в верхней и нижней точках оно центростремительное, имеем

$$a_{\min}=a_{верх}=\frac{v_{верх}^2}{l};\qquad a_{\max}=a_{нижн}=\frac{v_{нижн}^2}{l}=\frac{\left(2v_{нижн}\right)^2}{l}=4a_{\min}$$

где l - длина нити. С другой стороны, закон сохранения энергии для верхней и нижней точек траектории тела дает

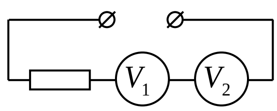
$$\frac{mv_{нижн}^2}{2}-\frac{mv_{верх}^2}{2}=2mgl\qquad\Rightarrow\qquad\frac{v_{нижн}^2}{l}-\frac{v_{верх}^2}{l}=4g\qquad\Rightarrow\qquad 3a_{\min}=4g$$

Отсюда

$$a_{\min}=\frac{4g}{3}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильно понято, в какой точке траектории ускорение тела минимально, в какой максимально – 0,5 балла,
2. Правильно использован второй закон Ньютона для вращательного движения – 0,5 балла,
3. Правильно использован закон сохранения энергии и установлено соотношение между скоростями тела в верхней и нижней точках траектории – 0,5 балла,
4. Правильный ответ – 0,5 балла.



2. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных резистора и двух вольтметров. Цепь подключают к источнику постоянного напряжения. При этом вольтметр V_1 показывает некоторое напряжение U_1, а вольтметр V_2 - напряжение $U_2=3U_1/2$. Если последовательно соединенные вольтметры подключить к источнику без резистора, то вольтметр V_1 покажет напряжение $U_1'=18$ В. Чему равно напряжение источника?

Решение. Вольтметр показывает напряжение на самом себе. Поскольку вольтметры одинаковые, то при последовательном соединении (одинаковый ток) их показания отличаются во столько же раз, во сколько отличаются их сопротивления, т.е.

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$$

(r_1 и r_2 - сопротивления первого и второго вольтметра соответственно). Поэтому во втором случае, когда вольтметры подключены без резистора, показания второго вольтметра равны

$$U_2' = \frac{U_2}{U_1} U_1' = 27 \text{ В}$$

И, следовательно, напряжение источника есть

$$U = U_1' + U_2' = U_1' + \frac{U_2}{U_1} U_1' = \frac{U_1'(U_1 + U_2)}{U_1} = \frac{5U_1'}{2} = 45 \text{ В}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильно установлено соотношение между сопротивлениями амперметров - 0,5 балла
2. Правильно найдено напряжение на вольтметре во втором случае – 0,5 балла
3. Правильный окончательный результат (и формула, и число) – 1 балл

3. В сосуде находится смесь одинаковых масс азота N_2 и гелия He под давлением p. Абсолютную температуру газа увеличивают вдвое, при этом 2/3 молекул азота диссоциируют на атомы. Найти давление смеси газов при этой температуре. Молярные массы газов равны $\mu_{He} = 4$ г/моль, $\mu_{N_2} = 28$ г/моль. Газы считать идеальными.

Решение. Пусть масса гелия и азота в сосуде равна m. Тогда закон Дальтона для первоначальной смеси газов дает

$$p = \frac{\nu_{He} RT}{V} + \frac{\nu_{N_2} RT}{V}$$

где

$$\nu_{N_2} = \frac{m}{\mu_{N_2}} = \nu; \qquad \nu_{He} = \frac{m}{\mu_{He}} = 7\nu,$$

количество вещества азота и гелия в сосуде, V - его объем. Отсюда имеем для начального давления смеси

$$p = \frac{8\nu RT}{V}$$

После нагревания в сосуде будет смесь молекулярного и атомарного азота и гелия. Количество вещества молекулярного и атомарного азота после диссоциации можно найти из следующих очевидных соотношений

$$\nu_{N_2}' = \frac{1}{3}\nu; \qquad \nu_N' = \frac{4}{3}\nu$$

Поэтому давление в сосуде будет равно

$$p' = \frac{\nu_{He} R2T}{V} + \frac{\nu_{N_2}' R2T}{V} + \frac{\nu_N' R2T}{V} = \frac{7\nu R2T}{V} + \frac{\nu R2T}{3V} + \frac{4\nu R2T}{3V} = \frac{52\nu RT}{3V} = \frac{13}{6} p$$

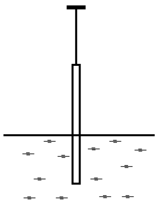
Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильная идея решения – использование закона Дальтона с подсчетом количества молекул в начале и в конце процесса – 0,5 балла

2. Правильно найдено количества вещества смеси в начале и в конце процесса - 0,5 балла

3. Получена правильная формула для давления в конечном состоянии – 0,5 балла

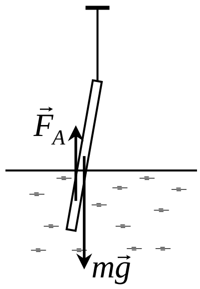
4. правильный ответ – 0,5 балла



4. Тонкий стержень длиной l подвешен на нити за один из своих концов. Стержень медленно погружают в воду, опуская точку подвеса. На какую максимальную глубину нижний конец стержня погрузится в воду? Плотность материала стержня в два раза меньше плотности воды.

Решение. В процессе погружения на стержень действуют силы тяжести, Архимеда, и натяжения нити. При этом ясно, что в начале погружения стержень будет располагаться вертикально, в самом конце – плавать в горизонтальном положении на поверхности воды. Поэтому максимальной глубиной погружения нижнего конца будет такая глубина, при которой стержень перестанет располагаться вертикально. Найдем эту глубину.

Вертикальное положение стержня будет устойчивым до тех пор, пока при малом его отклонении от вертикального положения будут возникать силы в это положение его возвращающие. А поскольку при малом отклонении стержня от равновесия возникают моменты сил тяжести и Архимеда относительно точки крепления нити к стержню, то устойчивость вертикального положения пропадает, когда момент силы Архимеда относительно этой точки не станет больше момента силы тяжести. Учитывая, что сила тяжести приложена к центру тяжести всего стержня, а сила Архимеда – к центру тяжести погруженной в воду части стержня, получим условие нарушения вертикальной устойчивости стержня



$$\rho_0 x\left(l-\frac{x}{2}\right)=\rho l\frac{l}{2} \qquad (*)$$

где ρ и ρ_0 - плотности стержня и воды, x - глубина погружения стержня в воду, l - его длина. Решая квадратное уравнение, найдем глубину погружения стержня в воду

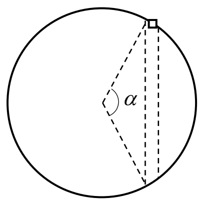
$$x=l\left(1-\sqrt{1-\frac{\rho}{\rho_0}}\right)=\frac{l\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}} \qquad (**)$$

При которой момент силы Архимеда будет равен моменту силы тяжести. При дальнейшем погружении для стержня будет выгодно располагаться под некоторым углом к вертикали, который будет увеличиваться с опусканием верхнего конца стержня. Поскольку условие моментов (*) не зависит от угла наклона стержня, то для его выполнения стержень должен быть погружен в воду на одну и ту же величину x при любом его наклоне. Но так как после достижения глубины x стержень будет располагаться под некоторым углом к вертикали, величина x (**) – максимальная глубина погружения в воду нижнего конца стержня.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. правильная идея решения – анализ устойчивости палочки – 0,5 балла,
2. правильные соотношения моментов для равновесия палочки – 0,5 балла,
3. найдена глубина, отвечающая потере устойчивости вертикального положения палочки – 0,5 балла,
4. Обосновано, что при дальнейшем опускании верхнего конца палочки нижний будет всплывать – 0,5 балла.

5. По хорде некоторой планеты сделана шахта, составляющая угол α с радиусами, проведенными в ее начало и конец. В шахту опускают тело. Коэффициент трения между телом и стенками шахты k. Через какое минимальное время тело окажется в точке шахты, находящейся на ближайшем расстоянии к центру планеты? Ускорение свободного падения на поверхности планеты - g, радиус планеты R.



Решение. Тело вообще не будет падать в шахту, если проекция силы тяжести на направление шахты не «побеждает» силу трения. Или

$$k \geq \mathrm{tg}\left(\alpha/2\right)$$

Тело будет двигаться только в противном случае, когда $k < \mathrm{tg}\left(\alpha/2\right)$.

Рассмотрим теперь движение тела в этом случае ($k < \mathrm{tg}\left(\alpha/2\right)$). В процессе движения в шахте на тело действуют сила тяжести, сила нормальной реакции стенок шахты и сила трения, причем все эти силы будут меняться в процессе движения. Найдем силу тяжести, действующую на тело.

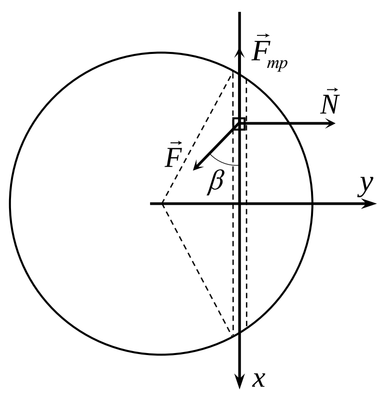
Пусть тело находится на расстоянии r до центра планеты. Мысленно разобьем планету на тонкие сферические слои. Как известно, тело будет взаимодействовать только со слоями радиус которых меньше r, причем эта сила ΔF определяется выражением

$$\Delta F = G\frac{\Delta m m}{r^2}$$

где G - гравитационная постоянная, Δm - масса сферического слоя, m - масса тела. Поэтому суммарная сила, действующая на тело, будет равна

$$F = \Delta F_1 + \Delta F_2 + ... = G\frac{m}{r^2}\left(\Delta m_1 + \Delta m_2 + ...\right) = G\frac{mM\left(r\right)}{r^2}$$

где ΔF_k - сила, действующая на тело со стороны k-го сферического слоя, $M\left(r\right)$ - масса части планеты, находящейся ближе к ее центру, чем тело. Находя эту массу через плотность планеты, получим для силы, действующей на тело со стороны планеты



$$F = G\frac{mM}{R^3}r = mg\frac{r}{R}$$

где R - радиус планеты, g - ускорение свободного падения на ее поверхности, причем эта сила направлена к центру планеты. Поэтому второй закон Ньютона в проекциях на оси, направленные вдоль и перпендикулярно шахте (см. рисунок), дает

$$N = mg\frac{r\sin\beta}{R}$$

$$ma_x = mg\frac{r\cos\beta}{R} - F_{тр}$$

Но $r\sin\beta = R\cos(\alpha/2)$ и не меняется в процессе движения тела. Поэтому и сила трения $F_{тр} = kN = kmg\cos(\alpha/2)$ остается неизменной в процессе движения тела. Поскольку $r\cos\beta = -x$, второе уравнение дает

$$ma_x = -mg\frac{x}{R} - kmg\cos(\alpha/2)$$

Это уравнение такое же как уравнение колебаний груза на вертикальной пружине, расположенной в поле тяжести. Поэтому зависимость координаты от времени дается гармонической функцией, сдвинутой в направлении постоянной силы на величину

$$\Delta x = \frac{kmg\cos(\alpha/2)}{(mg/R)} = kR\cos(\alpha/2)$$

При этом, если «сдвиг» положения равновесия будет больше половины расстояния от тела до начала координат, тело никогда начала координат не достигнет. Или

$$kR\cos(\alpha/2) < R\sin(\alpha/2)/2 \qquad \Rightarrow \qquad k < \frac{\sin(\alpha/2)}{2\cos(\alpha/2)}$$

Учитывая, что начальная скорость тела равна нулю, имеем

$$x(t) = A\cos\omega t - kR\cos(\alpha/2)$$

где A - постоянная, которую можно найти из начальных условий, $\omega = \sqrt{g/R}$. Поскольку $x(t=0) = -R\sin(\alpha/2)$, получаем

$$x(t) = -R\left(\sin(\alpha/2) - k\cos(\alpha/2)\right)\cos\omega t - kR\cos(\alpha/2)$$

причем выражение в скобках должно быть положительным, поскольку в противном случае сила трения не даст двигаться телу. Отсюда находим момент времени, когда тело окажется на минимальном расстоянии от центра планеты

$$t_1 = \sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\left(-\frac{k\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2) - k\cos(\alpha/2)}\right)$$

При двух ограничениях на коэффициент трения

$$k < \mathrm{tg}(\alpha/2),\ k < \frac{\sin(\alpha/2)}{2\cos(\alpha/2)}$$

При нарушении любого из этих неравенств задача теряет смысл – тело не попадет в точку $x = 0$.

Критерии оценки задачи

1. Правильно найдена гравитационная сила, действующая на тело внутри планеты – 0,5 балла,

2. Правильно написан второй закон Ньютона для тела в шахте. Доказано, что сила трения не меняется в процессе движения – 0,5 балла,

3. Правильная идея дальнейшего решения – использование уравнения гармонических колебаний со сдвинутым положением равновесия – 0,5 балла,

4. Правильный ответ и правильно установлены ограничения, не позволяющие телу попасть в точку с координатой $x = 0$ – 0,5 балла,

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

Оценка работы. Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. «Полуцелая» оценка не округляется.