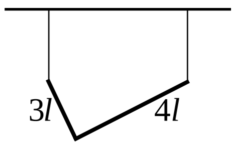
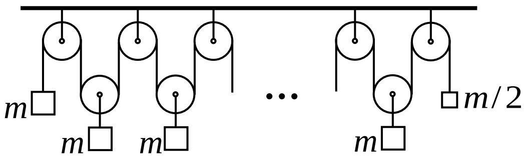
Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 11 класс
2018-2019 учебный год, комплект 2

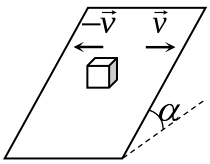


1. Два однородных стержня длиной $3l$ и $4l$ и массой m и $3m$ соответственно сварены концами под прямым углом друг к другу. Сделанный таким образом «прямой угол» повешен на двух нитях одинаковой длины, которые в равновесии занимают вертикальное положение (см. рисунок). Найти отношение силы натяжения левой

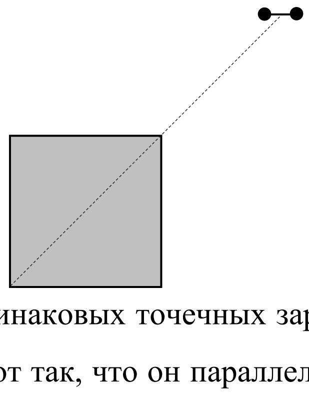
2. В закрытом сосуде содержится воздух и вода. Внутри сосуда поддерживается температура $t = 100°$С. Объем сосуда $V = 10$ л, давление $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па. Известно, что жидкая вода в сосуде есть и что она занимает очень малый объем. В результате изотермического расширения объем сосуда вырос до величины $2V$, а давление упало до величины $p_2 = 1,4 \cdot 10^5$ Па. Сколько молей воды находятся в сосуде? Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль$\cdot$К). Атмосферное давление - $p_0 = 10^5$ Па.



3. Имеется 2019 неподвижных и 2018 подвижных блоков, через которые переброшена невесомая, нерастяжимая веревка (см. рисунок). К осям подвижных блоков прикреплены 2018 тел массой m, к концам веревки – тела массой m и $m/2$. Найти величину и направление ускорения самого левого тела.

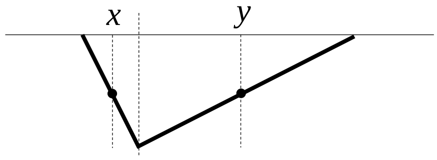


4. Тело аккуратно положили на длинную наклонную плоскость с углом наклона к горизонту α. Коэффициент трения между телом и плоскостью μ ($\mu > \mathrm{tg}\alpha$). Затем плоскость стали двигать так, что она с большой частотой меняет свою скорость $\vec{v}$ на противоположную $-\vec{v}$ (см. рисунок). Найти установившуюся скорость движения тела.



5. Из диэлектрика вырезали тонкий квадрат со стороной a и равномерно зарядили его зарядом Q. На продолжении диагонали на расстоянии $\sqrt{2}a$ от одного из углов квадрата, разместили равноплечий рычаг длиной r (причем размер рычага много меньше размера квадрата). Рычаг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости рисунка. На концах рычага укрепили два одинаковых точечных заряда q_0 (знак которых совпадает со знаком заряда квадрата). Рычаг удерживают так, что он параллелен одной из сторон квадрата (см. рисунок). Определите момент сил, действующих на рычаг со стороны квадрата, относительно оси рычага.

Решения. Критерии оценки решений задач



1. Во-первых, заметим, что согласно теореме Пифагора расстояние между точками крепления нитей равно $5l$. Далее используем уравнения статики. Для этого найдем плечи сил тяжести, действующих на стержни, относительно точек их подвеса. Из подобия треугольников находим (см. рисунок):

$$x = \frac{9l}{5}, \qquad y = 5l - x = \frac{16l}{5}$$

Поэтому уравнение моментов относительно точки крепления левой нити дает

$$T_{пр} 5l = mg\frac{x}{2} + 3mg\left(x + \frac{y}{2}\right) = \frac{111}{10}mgl \qquad \Rightarrow \qquad T_{пр} = \frac{111}{50}mg$$

А относительно точки крепления правой нити

$$T_{лев} 5l = mg\left(y + \frac{x}{2}\right) + 3mg\frac{y}{2} = \frac{89}{10}mgl \qquad \Rightarrow \qquad T_{лев} = \frac{89}{50}mg$$

Отсюда

$$\frac{T_{лев}}{T_{пр}} = \frac{89}{111}$$

Критерии оценки решения задачи

1.Использованы уравнения моментов – 0,5 балла,

2. Правильно записаны все моменты относительно оного конца стержня и относительно другого – 0,5 балла,

3. Геометрически правильно найдены все плечи – 0,5 балла,

4. Правильный ответ для отношения сил натяжения – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

2. Поскольку температура в сосуде равна $t = 100°$C, то давление насыщенных паров равно атмосферному - $p_{пара} = p_0 = 10^5$ Па. А давление газа в сосуде - $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па - в два раза больше. Следовательно, парциальное давление воздуха в сосуде равно - $p_{возд} = p_1 - p_0 = 10^5$ Па.

При увеличении объема сосуда количество вещества воздуха не меняется, и понижение его парциального давления связано только с увеличением объема. А поскольку объем увеличился вдвое – вдвое уменьшилось парциальное давление воздуха –

$$p'_{возд} = \frac{p_1 - p_0}{2} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Следовательно, парциальное давление водяного пара в сосуде составляет

$$p'_{пара} = p_2 - p'_{возд} = p_2 - \frac{p_1 - p_0}{2} = \frac{2p_2 - p_1 + p_0}{2} = 0,9 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Поскольку это значение меньше давления насыщенного пара при температуре $t = 100°$С, заключаем, что вся вода испарилась, и ее количество можно найти из закона Клапейрона-Менделеева для водяного пара в конечном состоянии

$$p'_{пара} 2V = \nu RT$$

где ν - искомое количество вещества пара, $T = 373$ К – абсолютная температура газа. Отсюда находим

$$\nu = \frac{2p'_{пара}V}{RT} = \frac{(2p_2 - p_1 + p_0)V}{RT} = 0,58 \text{ моль}$$

Критерии оценки решения задачи

1. Доказано, что в начальном состоянии есть жидкая вода – 0,5 балла,

2. Понято, как изменилось парциальное давление воздуха и парциальное давление водяного пара в конечном состоянии – 0,5 балла,

3. Правильно использован закон Клапейрона-Менделеева для водяного пара – 0,5 балла,

4. Правильный ответ, правильное вычисление – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

3. Пусть сила натяжения веревки, охватывающей все блоки, и к одному концу которой привязан груз m, а к другому - $m/2$, равна T. Тогда силы натяжения веревок, привязанных к осям нижних блоков, равны $T/2$. Поэтому второй закон Ньютона для всех наших тел дает:

Левое тело: $ma_{1x} = T - mg$

Нижние тела: $ma_{2x} = 2T - mg$

Правое тело: $\frac{m}{2}a_{3x} = T - \frac{m}{2}g$

Из второго-третьего уравнений видим, что уравнения второго закона Ньютона для нижних тел и левого тела совпадают, поэтому они имеют одинаковые ускорения $a_{3x} = a_{2x}$. На левое тело действует вдвое меньшая сила натяжения (при той же силе тяжести), поэтому его ускорение будет направлено вниз, а ускорение остальных тел – вверх. Поэтому второй закон Ньютона для левого тела и всех остальных тел дает

$$\begin{aligned} ma_1 &= mg - T \\ ma_2 &= 2T - mg \end{aligned} \qquad (*)$$

где a_1 и a_2 - ускорения самого левого и всех остальных тел соответственно. Найдем связь ускорений тел. Пусть нижние тела и правое тело поднялись за некоторый малый интервал времени вверх на величину Δx. Тогда слева появится лишний кусок веревки длиной

$$2 \cdot 2018\Delta x + \Delta x = 4037\Delta x$$

И, следовательно, левое тело опустится вниз на величину $4037\Delta x$. Поэтому и его ускорение будет в 4037 раз больше ускорения остальных тел: $a_1 = 4037a_2$. В результате из системы уравнений (*) находим

$$a_1 = \frac{4037}{8075}g \approx \frac{1}{2}g, \qquad a_2 = \frac{1}{8075}g \ll a_1$$

Т.е. левое тело движется вниз с ускорением $g/2$, остальные тела практически покоятся.

Критерии оценки решения задачи

1. Доказано, что ускорения всех грузов, кроме самого левого - одинаковы – 0,5 балла,

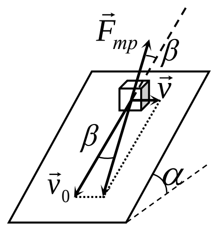
2. Правильно (из кинематических связей) установлены связи ускорения левого груза и всех остальных – 0,5 балла,

3. Составлена правильная система уравнений движения для всех грузов – 0,5 балла,

4. Правильные ответы для ускорений грузов – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Пусть установившаяся скорость тела v_0, которая направлена вниз вдоль плоскости. Но относительно плоскости тело будет двигаться под некоторым углом β к направлению наибыстрейшего спуска (в течение половины периода в одну сторону, в течение другой половины – в другую). Сила трения, действующая на тело со стороны плоскости, противоположна скорости тела относительно плоскости. Поэтому сила трения также направлена под углом β к направлению наибыстрейшего спуска (но вверх).



В установившемся режиме проекция силы трения на направление наибыстрейшего спуска компенсирует составляющую силы тяжести вдоль плоскости - $mg\sin\alpha$

$$\mu mg\cos\alpha\cos\beta = mg\sin\alpha$$

Отсюда

$$\cos\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu} \qquad (*)$$

А поскольку

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{v_0}$$

из формулы (*) находим

$$v_0 = \frac{v\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Критерии оценки решения задачи

1. Понят характер движения тела – тело движется по прямой вниз вдоль плоскости, а сила трения постоянно меняет направление из-за движения плоскости – 0,5 балла,

2. найден угол, под которым направлена сила трения – 0,5 балла,

3. получено правильное уравнение для установившейся скорости – 0,5 балла,

4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

5. Момент сил, действующих на рычаг, определяется разностью проекций кулоновских сил, действующих на заряды, на направление, перпендикулярное рычагу. Будем искать сразу эту разность.

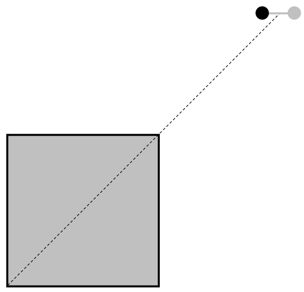


Рис.1.

На первый заряд со стороны квадрата (рис. 1) действует такая же сила, как если бы заряд лежал на продолжении диагонали, но на квадрат были бы наложены две заряженные полоски – одна с положительным зарядом шириной $r/2$, вторая с отрицательным, имеющие ту же поверхностную плотность, что и квадрат (рис.2; считаем и заряд квадрата, и заряды рычага положительными). Это связано с тем, что добавление таких полосок к сдвинутому квадрату восстанавливает его положение, сдвинутое относительно первого заряда.

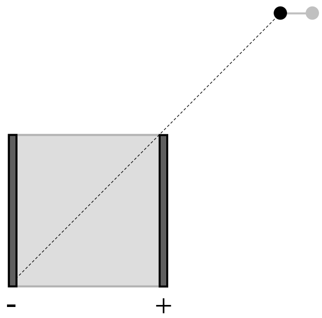


Рис.2.

Аналогично, на второй заряд рычага действует такая же сила, как если бы этот заряд лежал на продолжении диагонали квадрата, а на квадрат были наложены две полоски шириной $r/2$, одна из которых заряжена положительным зарядом с той же поверхностной плотностью, что и квадрат, вторая отрицательным (см. рис. 3).

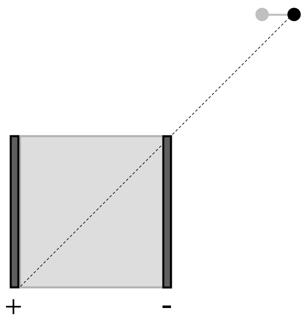


Рис.3.

Поэтому разность сил, действующих на заряды рычага со стороны квадрата, равна силе, действующей на один положительный заряд q_0 со стороны двух тонких полосок шириной r, заряженных положительным и отрицательным зарядом с той же поверхностной плотностью, что и квадрат (рис. 4). Таким образом, для вычисления разности сил, действующих на заряды рычага со стороны квадрата, нужно найти силу, действующую на один точечный заряд, лежащий на диагонали квадрата со стороны двух полосок шириной r, заряженных с той же поверхностной плотностью, что и наш квадрат, и лежащих около левой и правой сторон квадрата (см. рис. 4). При этом вклад в момент сил, действующих на рычаг относительно оси рычага, дает только проекция этой силы на направление, перпендикулярное самому рычагу (на вертикальное направление на рисунке 4).

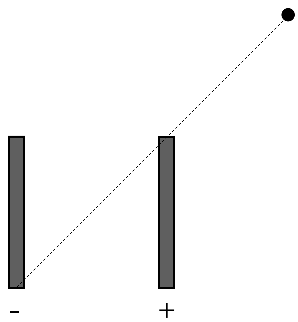


Рис.4.

Чтобы найти последнюю силу, используем то обстоятельство, что проекция напряженности электрического поля на некоторое направление равна разности потенциалов электрического поля в двух близких точках, деленной на расстояние между ними. Это значит, что чтобы найти проекцию вектора напряженности поля полосок в той точке, где находится заряд q_0 нужно найти потенциал поля, создаваемого полосками в точке на $x/2$ выше той точки, где находится заряд q_0, на $x/2$ ниже этой точки (x - произвольная малая длина), найти разность потенциалов, разделить на x (рис. 5). Но потенциал поля полосок в точке, лежащей на $x/2$ выше той точки, где находится заряд q_0, равен потенциалу поля, создаваемого в той точке, где находится заряд q_0, полосками и четырьмя квадратиками шириной r и высотой $x/2$ со знаками, показанными на рисунке 6, поскольку добавление к полоскам таких зарядов эквивалентно их сдвигу (здесь мы используем ту же логику, что и при вычислении разности сил, действующих на заряды рычага).

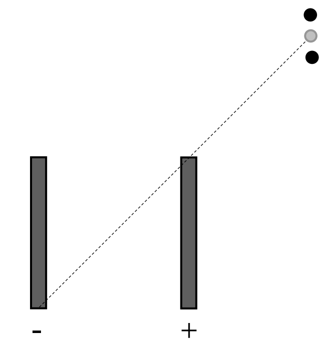


Рис.5.

Аналогично доказываем, что потенциал поля полосок в точке, лежащей на $x/2$ ниже той точки, где находится заряд q_0, равен потенциалу поля в той точке, где находится заряд, но создаваемому полосками и четырьмя квадратиками шириной r и высотой $x/2$ со знаками, показанными на рисунке 6. Вычитая эти два потенциала, заключаем, что разность потенциалов поля полосок в точках, лежащих на $x/2$ выше той точки, где находится заряд q_0, и на $x/2$ ниже этой точки, равна потенциалу поля четырех квадратиков шириной r и высотой x, лежащих в углах квадрата, со знаками, показанными на рисунке 6. Причем поскольку размер r много меньше расстояния до квадрата, а величина x является, вообще говоря, бесконечно малой величиной, эти квадратики можно считать точечными зарядами. Величину этих зарядов Δq легко найти, поскольку их поверхностная плотность такая же, как у квадрата:

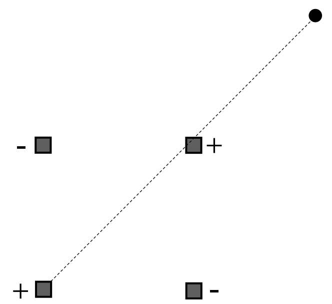


Рис.6.

$$\Delta q = \sigma x r = \frac{xrQ}{a^2}$$

Таким образом, разность проекций на вертикальную ось кулоновских сил, действующих на заряды рычага, определяется соотношением

$$F_{1x} - F_{2x} = kq_0 \Delta q \left(\frac{1}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{2\sqrt{2}a} - \frac{1}{\sqrt{5}a} - \frac{1}{\sqrt{5}a} \right) = \frac{kq_0 rQ}{a^3} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

В результате находим момент сил, действующих на рычаг со стороны квадрата

$$M = \left(F_{1x} - F_{2x} \right) \frac{r}{2} = \frac{kq_0 r^2 Q}{2a^3} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

Критерии оценки решения задачи

1. Правильная логика нахождения сил, сдвиг квадрата (или запись силы через интеграл) по квадрату – 0,5 балла,

2. Доказательство, что разность сил можно вычислить, если найти потенциал посередине отрезка, связывающего заряды, от четырех квадратиков, расположенных по углам квадрата (или правильные формулы для интегрирования по площади квадрата) – 0,5 балла,

3. Правильное вычисление потенциалов (или правильное вычисление интеграла) – 0,5 балла,

4. Правильный ответ – 0,5 балла,

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

Оценка работы – сумма оценок за задачи. Максимальная оценка работы – 10 баллов. «Шаг» оценки – 0,5 балла.