Отборочный тур олимпиады «Росатом»,
2018-2019 учебный год, физика, 11 класс, Комплект 1

1. Математический маятник совершает колебания в вертикальной плоскости. Известно, что ускорение маятника в нижнем положении в 1,2 раза больше его ускорения при максимальном отклонении. Найти угол максимального отклонения маятника от положения равновесия.

Решение. Пусть угол максимального отклонения маятника - α. В точке максимального отклонения ускорение направлено по касательной к траектории (т.к. скорость маятника равна нулю, равно нулю и центростремительное ускорение маятника) и создается, следовательно, только силой тяжести. Поэтому

$$a_m = g\sin\alpha$$

где a_m - ускорение маятника в точке максимального отклонения. В нижней точке ускорение маятника направлено к точке подвеса и равно $a_0 = v^2/l$ (l - длина нити; центростремительное ускорение). Найдем скорость маятника в нижней точке. По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\left(1-\cos\alpha\right) = 2mgl\sin^2\left(\alpha/2\right)$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{v^2}{l} = 4g\sin^2\left(\alpha/2\right)$$

Используя теперь данные условия, получаем

$$\frac{a_0}{a_m} = 1,2 = \frac{4g\sin^2\left(\alpha/2\right)}{g\sin\alpha} = 2\,\mathrm{tg}\left(\alpha/2\right)$$

Откуда находим

$$\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\left(0,6\right)$$

Критерии оценки задачи

1. Использована основная идея – найти ускорение маятника при его произвольном отклонении из второго закона Ньютона – 0,5 балла
2. Правильно найдено ускорение при максимальном отклонении – 0,5 балла
3. Правильно найдена скорость маятника в нижнем положении и его ускорение – 0,5 балла
4. Правильный найден максимальный угол отклонения – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

2. Тело два раза бросали с поверхности земли – с одинаковой по величине скоростью, но под разными углами к горизонту. Дальность полета тела в обоих случаях оказалась одной и той же и равной L. Известно, что время полета при первом броске было равно t. Найти время полета тела при втором броске. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, определяется известной формулой

$$L = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

где v_0 - начальная скорость, α - угол бросания. Из этой формулы следует, чти при бросках под углами α и $90° - \alpha$ (и одинаковой начальной скорости) дальность полета одинакова. Таким образом, два угла, под которыми бросали тело в двух случаях α_1 и α_2 связаны соотношением

$$\alpha_1 = 90° - \alpha_2$$

Используя теперь известную формулу для времени полета

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g},$$

Получаем

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha_1}{g}; \qquad t_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha_2}{g} = \frac{2v_0 \sin\left(90° - \alpha_1\right)}{g} = \frac{2v_0 \cos\alpha_1}{g}$$

Перемножая времена t_1 и t_2 получаем

$$t_1 t_2 = \frac{4v_0^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1}{g^2} = \frac{2L}{g}$$

Т.е. произведение времен на этих траекториях зависит только од длины пути, но не от углов и начальной скорости. Отсюда находим

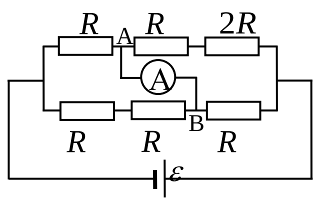
$$t_2 = \frac{2L}{gt_1}$$

Критерии оценки задачи

1. Использование правильной идеи – углы бросания в сумме дают 90 градусов – 0,5 балла
2. Использованы правильные формулы для времени движения – 0,5 балла
3. Замечено, что произведение времен сводится к дальности броска – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

3. В цепи, схема которой представлена на рисунке, найти ток через амперметр от А к В. ЭДС источника и величины сопротивлений известны. Внутренне сопротивление источника равно нулю.



Решение. Поскольку сопротивление амперметра равно нулю, то цепь представляет из себя два последовательно соединенных участка, первый из которых – параллельно соединенные сопротивления R и $R - R$. Второй – параллельно соединенные сопротивления $R - 2R$ и R. Поэтому общее сопротивление цепи равно

$$r = \frac{R(R+R)}{R+R+R} + \frac{R(R+2R)}{R+R+2R} = \frac{17R}{12}$$

Поэтому ток через источник равен

$$I = \frac{12\varepsilon}{17R}$$

Причем этот ток через рассматриваемый участок цепи течет справа налево. На участке параллельно соединенных резисторов $R-2R$ и R этот ток делится в пропорции 3:1 (три части через резистор R). Поэтому через правый нижний резистор R в направлении справа-налево течет ток

$$I_1 = \frac{3}{4} I = \frac{9\varepsilon}{17R}$$

На участке параллельно соединенных резисторов $R-R$ и R этот ток делится в пропорции 2:1 (две части через резистор R). Поэтому через правый и средний нижние резисторы R в направлении справа-налево течет ток

$$I_2 = \frac{1}{3} I = \frac{4\varepsilon}{17R}$$

Это значит, что по проводнику АВ (через амперметр) от точки В к точке А течет ток

$$I_A = I_1 - I_2 = \frac{9\varepsilon}{17R} - \frac{4\varepsilon}{17R} = \frac{5\varepsilon}{17R}$$

А от точки А к точке В течет ток

$$I_{A-B} = -\frac{5\varepsilon}{17R}$$

Критерии оценки задачи

1. Использование основная идея – равенство потенциалов точек А и В – 0,5 балла

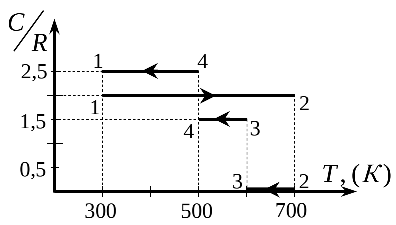
2. Правильно найдено сопротивление цепи и ток через источник – 0,5 балла

3. Правильный найдены токи через нижнюю ветвь цепи до точки В и после точки В – 0,5 балла

4. Правильный ответ для тока через амперметр – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

4. Один моль идеального одноатомного газа совершает циклический процесс 1-2-3-4-1. Дан график зависимости теплоемкости газа (в единицах газовой постоянной R) от его абсолютной температуры в процессах 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 (стрелками показано направление изменения температуры). Найти КПД цикла. Качественно построить график зависимости давления от объема в этом процессе.



Решение. В течение процесса 1-2 теплоемкость газа не меняется и равна $2R$. Поэтому в этом процессе давление является линейной функцией объема $p = \alpha V$, где α - произвольный коэффициент соответствующей размерности. В процессе 2-3 теплоемкость газа равна нулю, следовательно, это - адиабатический процесс. В процессе 3-4 теплоемкость газа равна $(3/2)R$, следовательно, это – изохорический процесс. В процессе 4-1 теплоемкость газа равна $(5/2)R$, следовательно, это – изобарический процесс. Качественный график зависимости давления от объема приведен на рисунке.

Найдем КПД этого цикла. Поскольку теплоемкость неотрицательна в течение всего процесса, при увеличении температуры газ получает тепло, при уменьшении отдает (за исключением адиабатического процесса 2-3, в котором газ не обменивался теплом с окружением). Следовательно, газ получает тепло в процессе 1-2 (контакт с нагревателем), отдает – в процессах 3-4 и 4-1 (контакт с холодильником). Количества теплоты, полученное от нагревателя и отданное холодильнику, найдем из определения теплоемкости

$$Q_н = Q_{1-2} = 2R\big(700(K) - 300(K)\big) = 800R\ (Дж)$$

Аналогично находим количество теплоты, отданное газом холодильнику:

$$Q_х = Q_{3-4} + Q_{4-1} = \frac{3}{2}R\big(600(K) - 500(K)\big) + \frac{5}{2}R\big(500(K) - 300(K)\big) = 650R\ (Дж)$$

Отсюда находим КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} = 0{,}1875$$

Критерии оценки задачи (Максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. По графикам правильно определены процессы происходящие с газом – 0,5 балла
2. Определено, где был контакт с нагревателем, где с холодильником – 0,5 балла.
3. Из определения теплоемкости правильно найдены количества теплоты, полученные от нагревателя и отданные холодильнику – 0,5 балла
4. Получен правильный ответ для КПД – 0,5 балла

5. Плотность атмосферы планеты убывает с высотой по закону $\rho = \alpha/\sqrt{r}$, α - известно, r - расстояние до центра планеты. Спутник выведен на орбиту радиуса $2R$ (R - радиус планеты) с первой космической скоростью для данной орбиты. Сила сопротивления воздуха определяется соотношением $F_c = \beta\rho v^2$, где β - известно, ρ - плотность воздуха, v - скорость спутника. Считая, что сила сопротивления мала, и каждый виток орбиты мало отличается от окружности, найти через какое время спутник упадет на поверхность планеты.

Решение. Поскольку потери энергии малы, спутник движется почти по окружности, и для него в любой момент времени выполнено условие

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \tag{1}$$

где v и m - скорость и масса спутника, M - масса планеты, R - радиус орбиты. Из формулы (5) следует, что при увеличении скорости спутника радиус круговой орбиты уменьшается. Также из формулы (1) следует, что в любой момент времени кинетическая ($E_K = mv^2/2$) и потенциальная энергия спутника ($E_П = -GmM/R$) связаны соотношением

$$E_K = -\frac{1}{2} E_\Pi \qquad (2)$$

Найдем, как меняется скорость спутника при действии на него силы сопротивления воздуха. С одной стороны, сила сопротивления совершает работу, что приводит к уменьшению скорости, с другой, при этом тело должно приближаться к планете, и сила гравитации должна совершать положительную работу. Определим результирующий вклад этих эффектов. Пусть в некоторый момент времени скорость спутника равна v, радиус орбиты r. Тогда закон сохранения энергии дает для двух близких моментов времени

$$\left(\frac{m\left(v+\Delta v\right)^2}{2} - \frac{GmM}{\left(r+\Delta r\right)} \right) - \left(\frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} \right) = A_c \qquad (3)$$

где Δv и Δr - изменения скорости и радиуса орбиты (эти величины могут быть и положительными и отрицательными), $A_c < 0$ - работа силы сопротивления воздуха. Из формулы (2) получим

$$-\frac{m\left(v+\Delta v\right)^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = A_c \qquad \Rightarrow \qquad \Delta v = -\frac{A_c}{mv} \qquad (4)$$

(здесь использована малость величины Δv). Из формулы (4) следует, что $\Delta v > 0$, т.е. скорость спутника при действии силы сопротивления возрастает, что связано с работой гравитационной силы. Поэтому, как это следует из (1), радиус орбиты спутника будет непрерывно уменьшаться, и тело будет двигаться по спирали.

Найдем скорость изменения радиуса орбиты. Считая, что сила сопротивления равна $F_c = \beta \rho v^2$ и что за время одного оборота скорость спутника и сила сопротивления изменятся мало, получим, применяя формулу (4) к одному обороту

$$\Delta v = -\frac{2\pi R F_c}{mv} = \frac{2\pi R \beta \rho v}{m} \qquad (5)$$

С другой стороны, из формулы (1)

$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

найдем связь малого изменения скорости и радиуса орбиты

$$\left(v+\Delta v\right)^2 = \frac{GM}{r+\Delta r} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 + 2v\Delta v = \frac{GM}{r\left(1+\Delta r/r\right)} = \frac{GM}{r}\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right) \qquad \Rightarrow \qquad 2v\Delta v = -\frac{GM}{r^2}\Delta r$$

(здесь использована формула для суммы геометрической прогрессии и отброшены слагаемые, содержащие малые величины в степени, большей, чем первой). Отсюда

$$2\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta r}{r}$$

(знак «минус» показывает, что при увеличении скорости радиус орбиты уменьшается). Поэтому из формулы (5) получим для изменение радиуса орбиты на расстоянии, равном длине орбиты

$$\Delta r = -\frac{4\pi r^2 \beta \rho}{m}$$

Вводя далее в эту формулу период обращения $T = 2\pi r / v$ и используя данную для рассматриваемой планеты зависимость плотности атмосферы от расстояния до центра, получим

$$\Delta r = -\frac{2Tr\beta\rho v}{m} = -\frac{2Tr\beta\rho}{m}\sqrt{\frac{GM}{r}} = -\frac{2Tr\alpha\beta}{m\sqrt{r}}\sqrt{\frac{GM}{r}} = -\frac{2T\alpha\beta\sqrt{GM}}{m} \qquad (10)$$

Из этой формулы заключаем, что скорость приближения спутника к планете

$$u = \frac{\Delta r}{T} = \frac{2\alpha\beta\sqrt{GM}}{m}$$

не зависит ни от скорости спутника, ни от радиуса орбиты, и, следовательно, является постоянной. Поэтому для времени падения получаем

$$t = \frac{R}{u} = \frac{Rm}{2\alpha\beta\sqrt{GM}}$$

Критерии оценки задачи (Максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильно использован закон изменения энергии для спутника – 0,5 балла

2. С учетом силы сопротивления воздуха найдено, как связаны изменения скорости и радиуса орбиты – 0,5 балла

3. Найдена скорость приближения спутника к планете. Доказано, что она постоянна – 0,5 балла

4. Получен правильный ответ для времени падения – 0,5 балла

Оценка работы. Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 10 баллов. «Полуцелая» оценка не округляется.